Jurnal Matematika Vol. 20 No. 2, November 2021
ISSN: 1412-5056 / 2598-8980
https://journals.unisba.ac.id/index.php/matematika

Diterima: 12/09/2021
Disetujui: 03/11/2021
Publikasi Online: 30/11/2021

Grup Multiplikatif Matriks Singular Ordo 2×2

Multiplicative Group of Singular Matrices by the Order 2×2

Mahmudi

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh, Indonesia

mahmudi@unsyiah.ac.id

Abstrak. Telah diketahui bahwa himpunan matriks tak singular berordo 2×2 merupakan grup multiplikatif. Sementara matriks singular dikecualikan karena tidak memiliki invers. Tulisan ini membahas tentang elemen identitas bagi himpunan matriks singular berordo 2×2 serta inversnya. Khususnya, akan dibuktikan bahwa himpunan matriks singular tersebut juga merupakan grup multiplikatif.

Kata kunci: matriks tak singular berordo 2×2, grup multiplikatif, matrik singular berordo 2×2

Abstract. *It is well known that the set of nonsingular matrices of the order* 2×2 *is a multiplicative group. While the singular matrix is excluded because it has no inverse. This paper discusses the identity element for the set of singular matrices of order* 2×2 *and its inverse. In particular, we will prove that the set is also a multiplicative group.*

Keywords: non-singular matrices of the order 2×2, *multiplicative group, singular matrices of the order* 2×2

1. Pendahuluan

Matriks selalu menarik untuk dikaji. Beberapa kajian terkait matriks telah dilakukan sebelumnya seperti penyelesaian persoalan matriks menggunakan Microsoft Mathematics [1], sifat nilai eigen matriks adjasen suatu representasi graf [2], dan perhitungan nilai trace suatu matriks berpangkat bilangan bulat negatif [3]. Matriks juga dapat dipandang sebagai suatu fungsi sebagaimana telah diteliti oleh Rohaeni, yang melakukan perhitungan fungsi matriks dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton [4].

Selain itu, kajian matriks juga dapat dikaitkan dengan teori grup. Penelitian grup matriks dengan entri bilangan bulat telah dilakukan oleh Mackiw [5] dan telah diteliti juga oleh Kuzmanovich & Pavlichenkov [6]. Mahmudi, Maulidi, & Amri juga membahas subgrup dari $SL(2,3)$, yaitu grup multiplikatif matriks berordo 2×2 dengan determinan bernilai 1 dan entri-entri bilangan $\mathbb{Z}_3$ [7].

Secara umum, telah diketahui bahwa $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan matriks [8]. Berdasarkan struktur $M_2(\mathbb{R})$ tersebut dapat dibentuk $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$ yang merupakan grup terhadap perkalian matriks [9]. Pengecualian matriks dengan determinan nol dari grup penjumlahan $M_2(\mathbb{R})$ ke grup perkalian $GL_2(\mathbb{R})$ adalah untuk menjamin matriks tersebut mempunyai invers.

Untuk struktur grup matriks $GL_2(\mathbb{R})$, proses pencarian elemen identitas dapat dilakukan dengan menyelesaikan sistem persamaan liniear dua varibel, yang menghasilkan batasan determinan matriks tidak boleh bernilai nol. Hal ini menarik perhatian penulis, apa yang terjadi pada saat determinan matriks tersebut bernilai nol? Artikel ini akan membahas tentang pembentukan grup multiplikatif matriks singular berordo 2×2, terutama terkait dengan elemen identitas dan invers matriks. Elemen identitas yang diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan linier untuk kasus determinan nol. Keberadaan elemen identitas yang berbeda dari biasanya, yaitu $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan invers merupakan syarat awal dari kemungkinan terbentuknya grup multiplikatif tersebut.

2. Landasan Teori

Perhatikan himpunan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$, himpunan G memuat elemen-elemen matriks dengan determinan nol dan dapat dibuktikan beberapa hal berikut ini terkait himpunan G.

a) Operasi perkalian matriks di G bersifat tertutup,
b) operasi perkalian matriks di G bersifat asosiatif,
c) matriks $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in G$ merupakan elemen identitas di G,
d) untuk setiap $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \in G$ terdapat $\begin{pmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{pmatrix} \in G$ sedemikian sehingga

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Berdasarkan empat hal tersebut himpunan G memenuhi definisi grup terhadap operasi perkalian matriks, dengan demikian G merupakan grup multiplikatif matriks singular. Himpunan G tersebut merupakan soal latihan pada buku yang ditulis oleh Gallian [5].

Hal ini secara alami akan memunculkan pertanyaan lebih lanjut, apakah hanya bentuk tersebut saja yang membentuk grup multiplikatif, ataukah masih memungkinkan bentuk lain? Dalam artikel ini, penulis ingin menelaah lebih jauh mengenai bentuk umum dari himpunan matriks singular berordo 2×2 yang dapat membentuk struktur grup.

3. Metodologi Penelitian

Penelitian ini merupakan kajian pustaka. Penulis mengkaji literatur terkait sifat-sifat matriks singular dan definisi grup. Beberapa tahapan yang dilakukan oleh penulis adalah sebagai berikut: Pertama, penulis mencari bentuk matriks singular berordo 2×2. Kedua, penulis membentuk himpunan baru dengan elemen-elemennya adalah matriks singular berordo 2×2 yang diperoleh pada langkah pertama. Ketiga, penulis memastikan bahwa operasi pada himpunan tersebut bersifat tertutup. Keempat, berdasarkan pengertian elemen identitas penulis mencoba menyelesaikan sistem persamaan sehingga terdapat elemen identitas yang memenuhi untuk matriks singular. Keempat, penulis mencari elemen invers bagi setiap matriks singular tersebut. Penulis juga memberikan contoh bentuk-bentuk himpunan matriks singular berordo 2×2 yang merupakan grup multiplikatif dengan elemen identitas dan invers bagi setiap elemen grup tersebut.

4. Hasil dan Pembahasan

Salah satu lemma penting terkait matriks singular berordo 2×2 adalah sebagai berikut.

Lemma 3.1 [10]. Misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dengan $abcd \neq 0$, maka $\det A = 0$ jika dan hanya jika $(c, d) = k(a, b)$ atau $(b, d) = k(a, c)$.

Bukti. Dibuktikan untuk bentuk $(c, d) = k(a, b)$, sementara bentuk $(b, d) = k(a, c)$ dapat dibuktikan dengan cara serupa.

Jika $(c, d) = k(a, b)$, diperoleh $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$. Dengan demikian, dapat dihitung $\det A = a(kb) - (ka)b = 0$.

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $\det A = 0$ maka $ad - bc = 0$, yaitu $ad = bc$. Pilih $k = \frac{d}{b}$, diperoleh $d = kb$ dan $c = \frac{d}{b}a = ka$. Artinya $(c, d) = k(a, b)$.

Berdasarkan Lemma 3.1, bentuk umum matriks singular berordo 2×2 dapat ditulis sebagai

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}, ab \neq 0$$

atau

$$B = \begin{pmatrix} a & ka \\ c & kc \end{pmatrix}, ac \neq 0.$$

Dapat dibuktikan bahwa perkalian sebarang dua matriks berbentuk $\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$ akan menghasilkan matriks dengan bentuk yang sama. Demikian juga, perkalian sebarang dua matriks berbentuk $\begin{pmatrix} a & ka \\ c & kc \end{pmatrix}$ akan menghasilkan matriks bentuk yang sama.

Selanjutnya, akan dicari suatu matriks berbentuk sama sedemikian hingga jika dikalikan dengan sebarang matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$ akan menghasilkan matriks A. Misalkan matriks yang ingin dicari tersebut adalah $E_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ kx & ky \end{pmatrix}$. Dengan demikian, akan diperoleh persamaan berikut.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ kx & ky \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} \qquad (1)$$

dan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ kx & ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) diperoleh $x + ky = 1$, sementara berdasarkan persamaan (2) diperoleh $x = \frac{a}{a+kb}$ dan $y = \frac{b}{a+kb}$. Matriks E_1 diharapkan menjadi elemen identitas, dengan demikian harus tunggal dan tidak bergantung dengan variabel. Syarat tersebut mengharuskan $a = b$ dan $k \neq -1$. Dengan proses serupa, elemen identitas untuk matriks $B = \begin{pmatrix} a & ka \\ c & kc \end{pmatrix}$ juga dapat ditentukan, yang mengharuskan syarat $a = c$ dan $k \neq -1$. Dengan demikian, untuk menjamin keberadaan elemen identitas, bentuk umum matriks singular ordo 2×2 haruslah

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix}$$

atau

$$B = \begin{pmatrix} a & ka \\ a & ka \end{pmatrix}.$$

Hasil tersebut dinyatakan dalam proposisi berikut.

Proposisi 3.1. Misalkan $k \in \mathbb{R}$ dengan $k \neq -1$ maka

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & ka \\ a & ka \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

Berturut-turut memuat elemen identitas $E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k} & \frac{1}{1+k} \\ \frac{k}{1+k} & \frac{k}{1+k} \end{pmatrix}$ dan $E_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k} & \frac{k}{1+k} \\ \frac{1}{1+k} & \frac{k}{1+k} \end{pmatrix}$.

Langkah selanjutnya adalah mencari invers bagi setiap elemen G_1 dan G_2. Proses perhitungan dilakukan untuk himpunan G_1, sementara untuk himpunan G_2 dapat dilakukan dengan cara serupa.

Untuk mencari elemen invers bagi setiap $\begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix} \in G_1$ dapat dilakukan dengan menyelesaikan persamaan

$$\begin{pmatrix} x & x \\ kx & kx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k} & \frac{1}{1+k} \\ \frac{k}{1+k} & \frac{k}{1+k} \end{pmatrix} \tag{3}$$

dan

$$\begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x \\ kx & kx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k} & \frac{1}{1+k} \\ \frac{k}{1+k} & \frac{k}{1+k} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Persamaan (3) dan Persamaan (4) akan memberikan hasil yang sama, yaitu

$$x = \frac{1}{a(1+k)^2}$$

Hasil tersebut merupakan bukti proposisi berikut.

Proposisi 3.2. Misalkan $k \in \mathbb{R}$ dengan $k \neq -1$ maka

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & ka \\ a & ka \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

Elemen invers bagi setiap $A = \begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix} \in G_1$ dan bagi setiap $B = \begin{pmatrix} a & ka \\ a & ka \end{pmatrix} \in G_2$ berturut-turut adalah $A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(1+k)^2} & \frac{1}{a(1+k)^2} \\ \frac{k}{a(1+k)^2} & \frac{k}{a(1+k)^2} \end{pmatrix}$ dan $B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(1+k)^2} & \frac{k}{a(1+k)^2} \\ \frac{1}{a(1+k)^2} & \frac{k}{a(1+k)^2} \end{pmatrix}$.

Telah diketahui secara umum, bahwa $M_2(\mathbb{R})$ bersifat asosiatif terhadap perkalian [11]. Dapat dibuktikan bahwa G_1 dan G_2 merupakan himpunan bagian $M_2(\mathbb{R})$. Dengan demikian, sifat asosiatif terhadap operasi perkalian pada $M_2(\mathbb{R})$ diwariskan pada G_1 dan G_2. Lebih lanjut, berdasarkan Proposisi 3.1 dan Proposisi 3.2, grup multiplikatif matriks singular berordo 2×2 dapat dinyatakan sebagai berikut.

Proposisi 3.3. Misalkan $k \in \mathbb{R}$ dengan $k \neq -1$ maka

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

dan

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & ka \\ a & ka \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

merupakan grup multiplikatif.

Contoh 3.1. Misalkan $k = 3$, maka

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 3a & 3a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

merupakan grup multiplikatif matriks singular dengan elemen identitas

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

dan

$$\begin{pmatrix} a & a \\ 3a & 3a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16a} & \frac{1}{16a} \\ \frac{3}{16a} & \frac{3}{16a} \end{pmatrix}$$

Contoh 3.2. Misalkan $k = -\frac{1}{2}$, maka $= 3$, maka

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{2}a \\ a & -\frac{1}{2}a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

merupakan grup multiplikatif matriks singular dengan elemen identitas

$$E_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

dan

$$\begin{pmatrix} a & -\frac{1}{2}a \\ a & -\frac{1}{2}a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{a} & -\frac{2}{a} \\ \frac{4}{a} & -\frac{2}{a} \end{pmatrix}$$

Salah satu sifat terkait grup multiplikatif matriks singular yang dapat mudah dibuktikan adalah grup tersebut merupakan grup komutatif. Dapat diperhatikan bawah

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & b \\ kb & kb \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ab + a(kb) & ab + a(kb) \\ (ka)b + (ka)(kb) & (ka)b + (ka)kb \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ba + (kb)a & ba + (kb)a \\ k(ab) + (kb)(ka) & k(ab) + (kb)(ka) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ba + (bk)a & ba + (bk)a \\ k(ba) + (kb)(ka) & k(ba) + (kb)(ka) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ba + (bk)a & ba + (bk)a \\ (kb)a + (kb)(ka) & (kb)a + (kb)(ka) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b & b \\ kb & kb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sementara untuk grup bentuk lainnya, dapat dibuktikan

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c & kc \\ c & kc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & kd \\ d & kd \end{pmatrix} &= c\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & k \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & k \end{pmatrix} \\
&= cd\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & k \end{pmatrix} \\
&= dc\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & k \end{pmatrix} \\
&= d\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & k \end{pmatrix} c\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d & kd \\ d & kd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & kc \\ c & kc \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Uraian tersebut merupakan bukti Proposisi 3.4 berikut ini.

Proposisi 3.4. Misalkan $k \in \mathbb{R}$ dengan $k \neq -1$ maka

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

dan

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & ka \\ a & ka \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

merupakan grup komutatif.

5. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan kajian hasil dan pembahasan, bentuk grup multiplikatif matriks singular berordo 2×2 adalah

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

dan

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & ka \\ a & ka \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}.$$

Elemen identitas bagi masing-masing grup tersebut adalah

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k} & \frac{1}{1+k} \\ \frac{k}{1+k} & \frac{k}{1+k} \end{pmatrix}$$

dan

$$E_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k} & \frac{k}{1+k} \\ \frac{1}{1+k} & \frac{k}{1+k} \end{pmatrix}.$$

Invers bagi setiap elemen G_1 dan G_2 adalah $\begin{pmatrix} a & a \\ ka & ka \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(1+k)^2} & \frac{1}{a(1+k)^2} \\ \frac{k}{a(1+k)^2} & \frac{k}{a(1+k)^2} \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} a & ka \\ a & ka \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(1+k)^2} & \frac{k}{a(1+k)^2} \\ \frac{1}{a(1+k)^2} & \frac{k}{a(1+k)^2} \end{pmatrix}$. Lebih jauh, grup multiplikatif matriks singular merupakan grup komutatif.

Penelitian lebih lanjut juga dapat dilakukan untuk mencari sifat-sifat lain dari grup multiplikatif matriks singular, serta mencari bentuk-bentuk matriks singular lainnya yang dapat membentuk grup.

Referensi

[1] Veliani, S. L., Kartini, H., Zikri, F., Harahap, E. (2021). Analisis Pemecahan Persoalan Matriks Menggunakan Microsoft Mathematics. *Matematika: Jurnal Teori dan Matematika Terapan*. Vol 20(1).

[2] Respitawulan. (2017). Properti Eigen untuk Graf K-Reguler Tak Terhubung. *Matematika: Jurnal Teori dan Matematika Terapan*. Vol 16 (2).

[3] Aryani, F., Yulianis, Y. (2018). Trace Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. Vol 4 (2).

[4] Rohaeni, O. (2007). Teorema Cayley-Hamilton sebagai Salah Satu Metode dalam Perhitungan Fungsi Matriks. *Matematika: Jurnal Teori dan Matematika Terapan*. Vol 6 (1).

[5] Mackiw, G. (1996). Finite Groups of 2×2 Integer Matrices. *Mathematics Magazine*. Vol 69 (5), 356-361.

[6] Kuzmanovich, J., & Pavlichenkov, A. (2002). Finite Groups of Matrices Whose Entries Are Integers. The *American Mathematical Monthly*. Vol 109(2), 173–186. https://doi.org/10.2307/2695329

[7] Mahmudi, Maulidi, I., Amri, S. (2019). Beberapa Subgrup dari SL (2,3). *Journal of Data Analysis*. Vol 4 (2), 77–82. https://doi.org/10.24815/jda.v2i2.15788

[8] Gallian, J. A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra*. Cengage Learning, USA.
[9] Dewi, R. N., Eliyati, N., Marbun, O. H. (2011). Kajian Struktur Aljabar Grup pada Himpunan Matriks yang Invertibel. *Jurnal Penelitian Sains*. Vol 14 (1A).
[10] Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra, 5th ed*. Wellesley – Cambridge Press, USA.
[11] Anton, H. & Kaul, A. (2019). *Elementary Linear Algebra, 12th ed*. Wiley, USA.