

## **Diagram Kendali Multivariat Poisson untuk Pengendalian Kualitas Proses Produksi di PT. X**

Siti Nurhayati, Suliadi\*

*Prodi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung*

### **ARTICLE INFO**

**Article history :**

Received : 5/4/2022

Revised : 8/7/2022

Published : 9/7/2022



Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Volume : 2  
No. : 1  
Halaman : 57 - 66  
Terbitan : **Juli 2022**

### **ABSTRAK**

Dalam prakteknya, pengendalian kualitas seringkali dalam bentuk karakteristik. Pendekatan yang biasa digunakan adalah pendekatan distribusi Poisson. Akan tetapi dalam praktek sering terdapat lebih dari satu karakteristik kualitas juga ditetapkan dalam suatu proses produksi, dimana karakteristik tersebut memiliki korelasi satu sama lain. Ketika terdapat kondisi dimana karakteristik dari kualitas lebih dari dua kategori, maka diagram kendali yang dapat digunakan adalah diagram kendali Multivariat Poisson. Pada penelitian ini akan dibahas mengenai penerapan diagram kendali Multivariat Poisson pada data kecacatan produksi thickener yang dimana jenis cacatnya terdiri dari empat variabel karakteristik kualitas yang diperoleh dari PT. X pada tahun 2020. Dari penelitian ini dapat disimpulkan bahwa data kecacatan produksi thickener untuk diagram kendali Multivariat Poisson Fase I menunjukkan bahwa proses berada dalam keadaan terkendali sehingga batas kendali digunakan kembali untuk memonitoring proses pada diagram kendali Fase II. Diagram kendali Multivariat Poisson Fase II menunjukkan bahwa semua titik berada di dalam batas kendali sehingga proses produksi berada dalam keadaan yang terkendali.

**Kata Kunci :** Pengendalian Kualitas, Distribusi Poisson, Diagram Kendali Multivariat Poisson.

### **ABSTRACT**

In practice, quality control is often in the form of characteristics. The approach commonly used is the Poisson distribution approach. However, in practice there are often more than one quality characteristic also defined in a production process, where these characteristics have a correlation with each other. When there are conditions where the characteristics of the quality are more than two categories, the control chart that can be used is the Multivariate Poisson control chart. In this study, we will discuss the application of the Multivariate Poisson control chart to the thickener production defect data where the defect type consists of four quality characteristic variables obtained from PT. X in 2020. From this study it can be concluded that the thickener production defect data for the Multivariate Poisson Phase I control chart shows that the process is in control so that the control limits are reused to monitor the process on the Phase II control chart. The Poisson Phase II Multivariate control chart shows that all points are within the control limits so that the production process is in control.

**Keywords :** Quality Control, Poisson Distribution, Multivariat Poisson Control Chart.

@ 2022 Jurnal Riset Statistika Unisba Press. All rights reserved.

## A. Pendahuluan

Seiring berjalannya waktu, kemajuan teknologi pun menjadi semakin canggih, hal ini akan menjadikan perusahaan terus membuat inovasi-inovasi baru untuk menghasilkan barang ataupun jasanya yang berguna untuk kehidupan manusia. Perusahaan-perusahaan tersebut bersaing secara ketat dalam menghasilkan produknya dengan kualitas yang terbaik.

Sebagai konsumen, masyarakat pun menginginkan kualitas produk yang dihasilkan harus baik, bahkan kualitasnya bisa menjadi semakin tinggi dari waktu ke waktu. Setiap perusahaan harus melakukan pengendalian kualitas pada produk yang dihasilkannya untuk meminimalisir kecacatan atau ketidaksesuaian yang terjadi, karena jika terdapat banyak produk yang cacat atau tidak sesuai akan menyebabkan masalah bagi perusahaan sehingga dapat menimbulkan kerugian yang besar pula.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mengatasi masalah pada pengendalian kualitas yaitu *Statistical Process Control* (SPC), di dalam metode ini terdapat *control chart* (diagram kendali) yang merupakan salah satu teknik utama yang digunakan dalam pengendalian kualitas [1].

Jika fokus utamanya adalah jumlah cacat pada setiap unit produksi, dan jumlah cacat diklasifikasikan menjadi dua atau lebih kategori, maka diagram kendali yang dapat digunakan yaitu diagram kendali Multivariat Poisson.

Chiu & Kuo [3] mengusulkan diagram kendali Multivariat Poisson (diagram kendali MP) untuk jumlah cacat data Multivariat Poisson yang berkorelasi positif. Model Multivariat Poisson yang digunakan dalam metode ini merupakan pengembangan dari model Bivariat Holgate, dimana terdapat korelasi positif dan asumsi kovarians yang sama antar variabel. Batas kendali diagram kendali MP ini dikembangkan dengan metode probabilitas yang dihitung berdasarkan jumlah cacat atau ketidaksesuaian untuk setiap karakteristik kualitas suatu produk.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka perumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut: (1) Bagaimana batas kendali diagram kendali Multivariat Poisson pada pengendalian kualitas produk?; (2) Bagaimana hasil penerapan diagram kendali Multivariat Poisson pada pengendalian kualitas produk?

Selanjutnya, tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: (1) Mengetahui batas kendali diagram kendali Multivariat Poisson pada pengendalian kualitas produk; (2) Mengetahui hasil penerapan diagram kendali Multivariat Poisson pada pengendalian kualitas produk.

## B. Metode Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari PT. X mengenai kecacatan pada produksi *thickener*, *thickener* merupakan salah satu polimer kimia yang digunakan untuk memberikan efek tebal atau keras pada kain. Karakteristik kecacatannya terdiri dari empat variabel jenis cacat, yaitu: warna tidak sempurna, mengandung kontaminan, pemasangan label miring/terbalik, dan label terlepas dari *packaging*. Data ini diambil dari 50 unit produksi *thickener* pada tahun 2020. Data akan dibagi menjadi dua, sebanyak 40 unit data digunakan untuk memperoleh batas kendali (Fase I) dan sebanyak 10 unit data digunakan sebagai penerapan diagram kendali yang diperoleh pada Fase I (Fase II). Langkah-langkah yang dilakukan untuk membuat diagram kendali Multivariat Poisson yaitu sebagai berikut:

### Uji kecocokan distribusi

Ismail, Fajri [4] mengatakan bahwa uji *Chi-Square* digunakan untuk menguji hipotesis apabila terdapat populasi yang terbagi menjadi dua kategori atau lebih. Apakah terdapat kecocokan atau tidak antara frekuensi objek yang diamati dengan objek yang diharapkan. Rumus untuk mencari nilai *Chi-Square* adalah:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \left[ \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \right] \quad (1)$$

dimana:

$O_i$  = frekuensi yang diamati

$E_i$  = frekuensi yang diharapkan

Secara umum, perumusan hipotesis uji *Chi-Square* yaitu:  $H_0$  = Data dari variabel acak  $X$  mengikuti distribusi tertentu dan  $H_1$  = Data dari variabel acak  $X$  tidak mengikuti distribusi tertentu

Untuk Kriteria uji Tolak  $H_0$  jika nilai  $\chi^2 > \chi^2_{tabel}$  dan terima  $H_0$  jika nilai  $\chi^2 \leq \chi^2_{tabel}$  Uji kecocokan distribusi dapat dilakukan dengan menggunakan bantuan *software*. Asumsi pengambilan keputusannya yaitu dengan melihat nilai *p-value* pada *output software*, jika nilai *p-value*  $< \alpha$  maka tolak  $H_0$ .

**Menghitung nilai statistik  $D$  setiap sampel.**

Didefinisikan statistik  $D$  sebagai jumlah dari seluruh variabel  $X_j$ , yaitu:

$$D = \sum_{j=1}^p X_j, \quad j = 1, 2, \dots, p \tag{2}$$

**Nilai  $\lambda_j$**

Momen pertama dari distribusi Poisson adalah [5]:

$$\mu_1 = E(X) = \sum_x x^k p(x) = \lambda \tag{3}$$

Dengan menggunakan momen sampel untuk menggantikan momen pertama, maka:

$$\hat{\lambda} = \hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \bar{X} \tag{4}$$

Oleh karena itu, penduga parameter  $\lambda_j$  adalah rata-rata sampel  $\bar{X}$ .

**Nilai  $\theta_0$**

Parameter  $\theta_0$  merupakan kovarians antara dua variabel  $(X_j, X_k)$ . Rumus untuk kovarians antara dua variabel  $(X_j, X_k)$ , dimana  $j \neq k$ . Rumus untuk kovarians antara dua variabel  $(X_j, X_k)$  yaitu:

$$Cov(X_j, X_k) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{ji} - \bar{X}_j)(X_{ki} - \bar{X}_k)}{n - 1}, \text{ dimana } j \neq k \tag{5}$$

Nilai  $Cov(X_j, X_k)$  akan ada sebanyak  $\frac{p(p-1)}{2}$ . Dengan menggunakan metode momen, maka momen kovarians  $(X_j, X_k)$  adalah:

$$Cov(X_j, X_k) = S_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{ji} - \bar{X}_j)(X_{ki} - \bar{X}_k)}{n - 1} \tag{6}$$

Penduga untuk  $\theta_0$  yaitu:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \left[ \frac{1}{p(p-1)/2} \right] \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=j+1}^p Cov(X_j, X_k) \\ &= \left[ \frac{1}{p(p-1)/2} \right] \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=j+1}^p S_{jk} \\ &= \left[ \frac{1}{p(p-1)/2} \right] \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=j+1}^p \frac{\sum_{i=1}^n (X_{ji} - \bar{X}_j)(X_{ki} - \bar{X}_k)}{n - 1} \end{aligned} \tag{7}$$

**Menghitung nilai batas kendali diagram kendali Multivariat Poisson**

Chiu & Kuo [3] memberikan persamaan untuk batas kendali atas (BKA) dan batas kendali bawah (BKB) Multivariat Poisson sebagai berikut:

$$P(D > BKA) \tag{8}$$

$$= \sum_{d=BKA}^{\infty} \exp \left\{ - \left[ \sum_{j=1}^p \lambda_j - (p-1)\theta_0 \right] \right\} \sum_{i=0}^{d/p} \frac{(\sum_{j=1}^p \lambda_j - (p\theta_0))^{d-pi} \theta_0^i}{(d-pi)! i!} \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$= 1 - \sum_{d=0}^{BKA-1} \exp \left\{ - \left[ \sum_{j=1}^p \lambda_j - (p-1)\theta_0 \right] \right\} \sum_{i=0}^{d/p} \frac{(\sum_{j=1}^p \lambda_j - (p\theta_0))^{d-pi} \theta_0^i}{(d-pi)! i!}$$

$$P(D < BKB) \tag{9}$$

$$= \sum_{d=0}^{BKB} \exp \left\{ - \left[ \sum_{j=1}^p \lambda_j - (p-1)\theta_0 \right] \right\} \sum_{i=0}^{d/p} \frac{(\sum_{j=1}^p \lambda_j - (p\theta_0))^{d-pi} \theta_0^i}{(d-pi)! i!} \leq \frac{\alpha}{2}$$

Pada proses Multivariat Poisson, ketika setiap variabel  $X_j$  yang mempunyai nilai rata-rata yang kecil akan mengakibatkan nilai statistik  $D$  pun menjadi kecil atau nol. Hal ini dapat menyebabkan nilai probabilitas  $P(D = 0)$  lebih besar daripada  $\frac{\alpha}{2}$ . Jika hal itu terjadi, maka nilai BKB menjadi nol dan hanya BKA yang dicari. Oleh karena itu harus dilakukan perhitungan nilai BKB terlebih dahulu, jika nilai BKB sama dengan nol, maka BKA dapat diperoleh melalui persamaan sebagai berikut:

$$P(D > BKA) \tag{10}$$

$$= \sum_{d=BKA}^{\infty} \exp \left\{ - \left[ \sum_{j=1}^p \lambda_j - (p-1)\theta_0 \right] \right\} \sum_{i=0}^{d/p} \frac{(\sum_{j=1}^p \lambda_j - (p\theta_0))^{d-pi} \theta_0^i}{(d-pi)! i!} < \alpha$$

$$= 1 - \sum_{d=0}^{BKA-1} \exp \left\{ - \left[ \sum_{j=1}^p \lambda_j - (p-1)\theta_0 \right] \right\} \sum_{i=0}^{d/p} \frac{(\sum_{j=1}^p \lambda_j - (p\theta_0))^{d-pi} \theta_0^i}{(d-pi)! i!} < \alpha$$

**Memplotkan nilai statistik  $D$  pada diagram kendali Multivariat Poisson.**

Ketika semua titik berada di dalam batas kendali, maka BKA dan BKB dapat digunakan untuk memonitoring proses. Tetapi, jika terdapat titik di luar batas kendali, maka hapus pengamatan tersebut dan hitung ulang kembali ke langkah 3. Hal ini dilakukan berulang-ulang sampai semua titik berada di dalam batas kendali (Fase I).

Penerapan diagram kendali yang diperoleh pada Fase I (Fase II), yaitu: (1) Membuat diagram kendali dengan BKB dan BKA dari langkah 5; (2) Menghitung nilai statistik  $D$  menggunakan persamaan (2); (3) Memplotkan nilai statistik  $D$  pada diagram kendali Multivariat Poisson; (4) Membuat kesimpulan dari diagram kendali Multivariat Poisson.

**C. Hasil dan Pembahasan**

**Uji Kecocokan Distribusi**

Dengan menggunakan taraf signifikan ( $\alpha$ ) sebesar 0,05. Diperoleh nilai  $p$ -value dengan bantuan *software Minitab* hasilnya adalah sebagai berikut:

**Tabel 1.** Nilai *P-Value* Setiap Variabel Karakteristik Jenis Kecacatan

Variabel Karakteristik Jenis Kecacatan	<i>P-Value</i>
Warna tidak sempurna	0,224
Mengandung kontaminan	0,069
Pemasangan label miring/terbalik	0,099
Label terlepas dari <i>packaging</i>	0,035

**Uji Chi-Square**

Variabel warna tidak sempurna: Hipotesis  $H_0$  : Data variabel warna tidak sempurna berdistribusi Poisson;  $H_1$  : Data variabel warna tidak sempurna tidak berdistribusi Poisson. Kriteria Uji :  $p\text{-value} = 0,224 > \alpha = 0,05$  maka  $H_0$  diterima. Artinya, data variabel warna tidak sempurna berdistribusi Poisson.

Variabel mengandung kontaminan : Hipotesis  $H_0$  : Data variabel mengandung kontaminan berdistribusi Poisson;  $H_1$  : Data variabel mengandung kontaminan tidak berdistribusi Poisson. Kriteria Uji  $p\text{-value} = 0,069 > \alpha = 0,05$  maka  $H_0$  diterima. Artinya, data variabel mengandung kontaminan berdistribusi Poisson.

Variabel pemasangan label miring/terbalik : Hipotesis  $H_0$  : Data variabel pemasangan label miring/terbalik berdistribusi Poisson;  $H_1$  : Data variabel pemasangan label miring/terbalik tidak berdistribusi Poisson. Kriteria Uji  $p\text{-value} = 0,099 > \alpha = 0,05$  maka  $H_0$  diterima. Artinya, data variabel pemasangan label miring/terbalik berdistribusi Poisson.

Variabel label terlepas dari *packaging* : Hipotesis  $H_0$  : Data variabel label terlepas dari *packaging* berdistribusi Poisson;  $H_1$  : Data variabel label terlepas dari *packaging* tidak berdistribusi Poisson. Kriteria Uji  $p\text{-value} = 0,035 < \alpha = 0,05$  maka  $H_0$  ditolak. Artinya, data variabel label terlepas dari *packaging* tidak berdistribusi Poisson. Karena variabel label terlepas dari *packaging* tidak berdistribusi Poisson, maka variabel tersebut tidak diikutsertakan dan hanya tiga variabel yang digunakan untuk memperoleh nilai batas kendali.

**Statistik D**

Untuk menghitung nilai statistik *D* setiap sampel, menggunakan persamaan (3) dengan cara menjumlahkan semua nilai dari setiap variabel karakteristik jenis kecacatan. Diperoleh hasil nilai statistik *D* sebagai berikut:

**Tabel 2.** Nilai Statistik *D* (Fase I)

Unit	Jenis Karakteristik Kecacatan			<i>D</i>
	Warna Tidak Sempurna	Mengandung Kontaminan	Pemasangan Label Miring/Terbalik	
1	0	2	3	5
2	0	0	2	2
3	1	0	0	1
4	0	1	0	1
5	0	1	1	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
40	4	2	3	9
Jumlah	43	43	35	

**Parameter  $\lambda_j$  dan  $\theta_0$**

Untuk menghitung nilai parameter  $\lambda_j$  digunakan persamaan (4), dimana  $\lambda_j$  merupakan nilai rata-rata dari setiap variabel karakteristik jenis kecacatan. Diperoleh hasil nilai  $\lambda_j$  sebagai berikut:

$$\lambda_1 = \frac{43}{40} = 1,075; \lambda_2 = \frac{43}{40} = 1,075; \lambda_3 = \frac{35}{40} = 0,875$$

Untuk menghitung nilai parameter  $\theta_0$  digunakan persamaan (7). Diperoleh hasil nilai  $\theta_0$  yaitu 0,25235.

**Batas Kendali Multivariat Poisson**

Batas kendali Multivariat Poisson dihitung melalui pendekatan nilai dari jumlah peluang statistik  $D$  setiap sampel terhadap nilai  $\frac{\alpha}{2}$ , dimana untuk batas kendali 3 sigma setara dengan nilai kesalahan ( $\alpha$ ) = 0,0027. Nilai BKB dihitung dengan menggunakan persamaan (8). Dengan menggunakan program RStudio diperoleh nilai peluang  $P(D = d)$  sebagai berikut:

**Tabel 3.** Nilai Peluang  $P(D = d)$

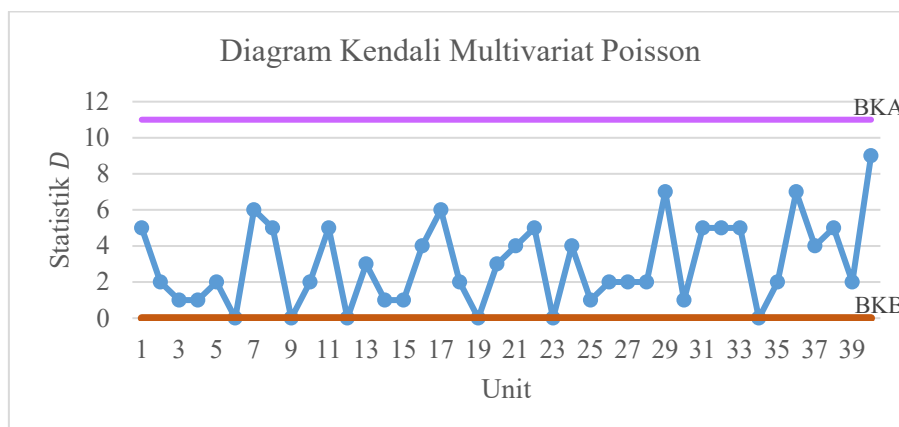
$d$	$P(D = d)$	CDF	1-CDF
0	0.0804355	0.0804355	0.9195645
1	0.1824236	0.2628591	0.7371409
2	0.2068638	0.4697229	0.5302771
3	0.1766835	0.6464064	0.3535936
4	0.1347033	0.7811097	0.2188903
5	0.0924213	0.8735311	0.1264689
6	0.0572275	0.9307586	0.0692414
7	0.0331095	0.9638681	0.0361320
8	0.0181323	0.9820003	0.0179997
9	0.0093830	0.9913834	0.0086167
10	0.0046346	0.9960179	0.0039821
11	0.0022035	0.9982214	0.0017786
12	0.0010084	0.9992298	0.0007702

Dari Tabel 3. diperoleh nilai peluang statistik  $D$  pada batas jumlah cacat = 0 yaitu  $P(d = 0)$  sebesar 0,0804355. Karena nilai 0,0804355 > 0,00135, maka nilai BKB diagram kendali Multivariat Poisson menjadi 0. Oleh karena itu, untuk menghitung nilai BKA digunakan persamaan (10).

Dari Tabel 3. diperoleh nilai peluang statistik  $D$  pada jumlah cacat = 11 yaitu  $1 - P(D < 11)$  sebesar 0,0017786 < 0,0027. Maka nilai BKA diagram kendali Multivariat Poisson adalah 11.

**Diagram Kendali Multivariat Poisson**

Setelah mendapatkan nilai BKB dan BKA, diagram kendali Multivariat Poisson dibuat dengan memplotkan nilai statistik  $D$  sebagai berikut:



**Gambar 1.** Diagram Kendali Data Kecacatan Produksi *Thickener* (Fase I)

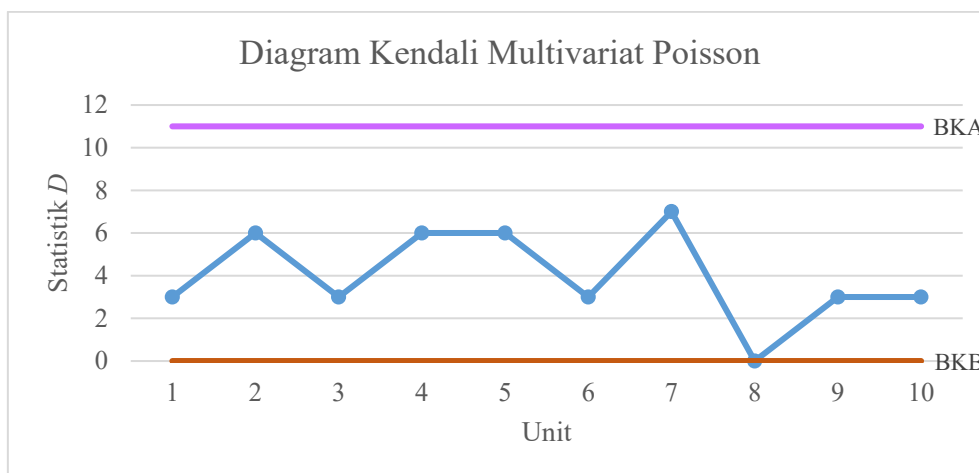
Hasil dari diagram kendali Multivariat Poisson pada Fase I dengan 40 unit data berada dalam keadaan terkendali karena semua titik berada di dalam batas kendali, sehingga secara statistik proses tersebut terkendali.

Maka, batas kendali ini dapat digunakan untuk membuat diagram kendali pada Fase II dengan 10 unit data. Diperoleh hasil nilai statistik  $D$  Fase II sebagai berikut:

**Tabel 4.** Nilai Statistik  $D$  (Fase II)

Unit	Jenis Karakteristik Kecacatan			$D$
	Warna Tidak Sempurna	Mengandung Kontaminan	Pemasangan Label Miring/Terbalik	
1	0	0	3	3
2	3	1	2	6
3	0	1	2	3
4	2	3	1	6
5	1	2	3	6
6	3	0	0	3
7	1	3	3	7
8	0	0	0	0
9	0	1	2	3
10	1	2	0	3

Dengan menggunakan nilai batas kendali pada Fase I dan memplotkan nilai statistik  $D$  pada Fase II, diagram kendali Multivariat Poisson untuk Fase II adalah:



**Gambar 2.** Diagram Kendali Data Kecacatan Produksi Thickener (Fase II)

Hasil dari diagram kendali Multivariat Poisson pada Fase II dengan 10 unit data berada dalam keadaan terkendali karena semua titik berada di dalam batas kendali, sehingga secara statistik proses tersebut terkendali.

**D. Kesimpulan**

Berdasarkan pembahasan dalam penelitian ini, peneliti menyimpulkan beberapa hasil penelitian seperti, batas kendali diagram kendali Multivariat Poisson dengan tiga variabel karakteristik jenis kecacatan diperoleh melalui pendekatan nilai dari jumlah peluang statistik  $D$  dengan menggunakan nilai kesalahan  $(\alpha) = 0,0027$  diperoleh nilai BKB = 0 dan BKA = 11.

Penerapan diagram kendali Multivariat Poisson untuk Fase I pada data kecacatan produksi *thickener* menyatakan bahwa proses produksi dalam keadaan terkendali karena semua titik berada di dalam batas kendali, sehingga batas kendali dapat digunakan untuk memonitoring proses selanjutnya pada Fase II. Pada diagram kendali Multivariat Poisson Fase II menyatakan bahwa proses produksi dalam keadaan terkendali karena semua titik berada di dalam batas kendali.

## Daftar Pustaka

- [1] D. C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control 7th Edition*. United States of America, 2013.
- [2] Muhammad Bangkit Riksa Utama and N. Hajarisman, “Metode Pemilihan Variabel pada Model Regresi Poisson Menggunakan Metode Nordberg,” *J. Ris. Stat.*, vol. 1, no. 1, pp. 35–42, Jul. 2021, doi: 10.29313/jrs.v1i1.24.
- [3] J.-E. Chiu and T.-I. Kuo, “Attribute Control Chart for Multivariate Poisson Distribution,” vol. 37, no. 1, pp. 146–158, 2007, doi: <https://doi.org/10.1080/03610920701648771>.
- [4] F. Ismail, *Statistika Untuk Penelitian Pendidikan dan Ilmu-Ilmu Sosial*. Jakarta: Prenadamedia Group (Divisi Kencana), 2018.
- [5] R. Fitriani and S. Astutik, *Statistika Matematika dengan Pendekatan Terapan*. Malang: UB Press, 2000.