Jurnal Riset Matematika (JRM)
e-ISSN 2798-6306 | p-ISSN 2808-313X
https://journals.unisba.ac.id/index.php/JRM
Tersedia secara online di
Unisba Press
https://publikasi.unisba.ac.id/

Analisis Kekonvergenan Modifikasi Metode Newton-Raphson dan Modifikasi Metode Secant

Indah Widia Agustini, Gani Gunawan*

Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Indonesia.

ARTICLE INFO

Article history :
Received : 27/09/2024
Revised : 26/12/2024
Published : 30/12/2024

Volume : 4
No. : 2
Halaman : 93 - 102
Terbitan : **Desember 2024**

Terakreditasi Sinta Peringkat 5 berdasarkan Ristekdikti No. 177/E/KPT/2024

ABSTRAK

Metode numerik merupakan algoritma pendekatan. Kekonvergenan dalam metode numerik merupakan kondisi di mana suatu barisan hampiran konvergen ke solusi sejati. Dengan kata lain, kekonvergenan ialah kondisi di mana suatu proses iterasi mendekati suatu nilai tertentu dengan tingkat kesalahan yang lebih kecil. Tujuan penelitian ini adalah menganalisis kekonvergenan metode Newton-Raphson, metode Secant, modifikasi metode Newton-Raphson dan modifikasi metode Secant serta melihat perbedaan kecepatan konvergensi dari masing-masing metode. Pada penelitian ini, menganalisis kekonvergenan metode numerik menggunakan deret Taylor untuk menguraikan fungsi di sekitar titik iterasi, sehingga dapat memperkirakan kesalahan aproksimasinya. Orde konvergensi dapat ditentukan dengan melihat pangkat dari galat iterasi sebelumnya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa orde konvergensi metode Newton-Raphson, metode Secant, modifikasi metode Newton-Raphson dan modifikasi metode Secant secara berturut-turut yaitu bersifat kuadratik, superlinear, kubik, dan kuadratik. Modifikasi dari masing-masing metode menunjukkan peningkatan orde konvergensi daripada sebelum metode dimodifikasi. Metode dengan orde konvergensi yang semakin besar memberikan indikasi tingkat konvergensi akan semakin cepat.

Kata Kunci : Modifikasi Newton-Raphson, Modifikasi Secant, Kekonvergenan.

ABSTRACT

Numerical methods are algorithmic approaches. Convergence in numerical methods is a condition where a sequence almost converges to a true solution. In other words, convergence is a condition where an iteration process approaches a certain value with a smaller error rate. This research aims to analyze the convergence of the Newton-Raphson method, the Secant method, a modification of the Newton-Raphson method, and a modification of the Secant method and to see the differences in the convergence speed of each method. In this research, analyzing the convergence of numerical methods uses the Taylor series to describe the function around the iteration point so that it can describe the approximation error. Order convergence can be determined by looking at the power of the previous iteration error. The research results show that the order convergence of the Newton-Raphson method, Secant method, modified Newton-Raphson method, and modified Secant method are quadratic, superlinear, cubic, and quadratic, respectively. Modifications of each method show improvement or convergence compared to before the method was modified. Methods with greater convergence orders indicate that the level of convergence will be faster.

Keywords : Modified Newton-Raphson, Modified Secant, Convergence.

Corresponding Author : Email : ggani9905@gmail.com
Indexed : Garuda, Crossref, Google Scholar
DOI : https://doi.org/10.29313/jrm.v4i2.5041

A. Pendahuluan

Metode numerik merupakan metode yang hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran *(approximation)* [13]. Solusi hampiran jelas tidak sama dengan solusi sejati, sehingga terdapat selisih antara keduanya yang disebut sebagai galat *(error)* [1]. Metode pencarian akar solusi persamaan secara numerik yang digunakan pada penelitian ini adalah metode Newton-Raphson dan metode Secant [14]. Metode Newton-Raphson tidak dapat digunakan jika turunan pertama fungsi di nilai titik awal sama dengan nol atau mendekati nol. Kelemahan pencarian akar solusi persamaan menggunakan metode Newton-Rapshon telah dilakukan pengembangan metode numerik lain yaitu metode Secant. Metode Secant adalah variasi dari metode Newton-Raphson yang tidak memerlukan turunan pertama. Sebagai gantinya, metode ini menggunakan aproksimasi turunan dengan mencari persamaan yang ekuivalen dengan rumus turunan fungsi yaitu menggunakan gradien garis yang melalui dua titik [2].

Perbedaan antara metode Newton-Raphson dan Secant dalam menentukan sebuah akar dari suatu fungsi ialah menentukan besarnya akar pada iterasi selanjutnya. Selain itu, kedua metode ini memiliki konvergensi yang berbeda. Metode Newton-Raphson dikenal dengan metode yang konvergen secara kuadratik. Sedangkan metode Secant konvergensinya hanya bersifat superlinear, yang berarti lebih lambat dibandingkan metode Newton-Raphson [3]. Menurut Gunawan [4] dalam pencarian akar dari suatu fungsi yang mempunyai multiplisitas lebih dari 1, konvergensinya tidak bersifat kuadratik [15]. Di mana kecepatan kekonvergenan lebih lambat dari pada untuk kasus mencari akar fungsi yang mempunyai bilangan multiplisitas satu [16]. Sehingga dikembangkan modifikasi Metode Newton yang memberikan suatu cara lebih umum dalam menentukan akar fungsi, baik untuk akar fungsi yang sederhana maupun akar fungsi yang mempunyai bilangan multiplisitas yang lebih dari satu.

Menganalisis kekonvergenan merupakan aspek penting dalam suatu metode numerik. Kekonvergenan merupakan kondisi di mana suatu barisan bilangan atau proses iterasi mendekati nilai tertentu dengan tingkat kesalahan yang lebih kecil. Pada proses menghampiri penyelesaian eksak, efisiensi metode iterasi sangat dipengaruhi oleh orde konvergensi. Di mana orde konvergensi merupakan konsep dasar untuk mengukur kecepatan suatu metode iteratif dalam mendekati solusi yang sebenarnya [17]. Hal ini menunjukkan seberapa cepat galat berkurang pada setiap iterasi dari suatu metode. Metode iterasi dengan orde konvergensi tinggi, membutuhkan sedikit iterasi dibandingkan dengan metode iterasi yang lebih rendah orde konvergensinya [5].

Melihat kelebihan dan kekurangan dari metode Newton-Raphson dan Secant, beberapa peneliti telah mengembangkan modifikasi dari masing-masing metode dengan tujuan memperbaiki kekurangan dalam formulasi pencarian akar, serta melihat sejauh mana tingkat konvergensi. Berdasarkan uraian di atas, penulis akan melakukan analisis kekonvergenan dari metode Newton-Raphson, metode Secant, modifikasi metode Newton-Raphson dan modifikasi metode Secant serta melihat perbedaan kecepatan konvergensi dari masing-masing metode.

B. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penilitian adalah studi literatur. Kajian menggunakan metode literatur dengan melakukan penelusuran dan penelaah terhadap beberapa dalil dan teorema yang mempunyai relevansi dengan topik bahasan. Penelitian mengenai analisis kekonvergenan dilakukan dengan cara mengekspansi rumus iterasi metode menggunakan deret Taylor untuk melihat besarnya orde konvergensi sehingga dapat memperkirakan galat aproksimasinya [18]. Orde konvergensi tiap metode ditentukan dengan melihat pangkat dari galat iterasi sebelumnya. Adapun beberapa definisi dan teorema dasar yang dapat digunakan sebagai landasan materi untuk uraian pada bagian selanjutnya yang ditulis sebagai berikut:

Teorema 1 (Deret Taylor)
Misalkan $f(x)$ mempunyai $n+1$ turunan kontinu pada $[a,b]$ untuk beberapa $n \geq 0$, dan misalkan $x, x_0 \in [a,b]$ [6]

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

di mana

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x), \qquad x < \xi_x < x_0$$

dengan $R_n(x)$ adalah galat atau sisa (residu).

Definisi 1 (Orde Hampiran)
Misalkan $f(h)$ dihampiri dengan fungsi $p(h)$ Jika $|f(h) - p(h)| \leq M|h^n|$, yang dalam hal ini M adalah konstanta riil lebih dari 0, maka dapat dikatakan bahwa $p(h)$ menghampiri $f(h)$ dengan orde penghampiran $O(h^n)$ dan ditulis menjadi [7]

$$f(h) = p(h) + O(h^n)$$

$O(h^n)$ dapat diartikan sebagai orde galat dari penghampiran fungsi.

Definisi 2 (Multiplisitas)
Akar x_0 dari f mempunyai multiplisitas k, jika $f^{[k-1]}(x_0) = 0$ dan $f^k(x_0) \neq 0$, dengan $f^k(x_0)$ menotasikan turunan ke k dari f pada x_0 [4].

Multiplisitas dapat dikatakan jika x_0 adalah akar dari f dengan multiplisitas k maka f dapat dikatakan dalam bentuk

$$f(x) = (x - x_0)^k h(x)$$

dengan $h(x)$ adalah fungsi kontinu, sehingga $h(x) \neq 0$ dan k bilangan bulat positif.

Definisi 3 (Orde Konvergensi)
Diberikan $f(x)$ yang merupakan fungsi dengan akar persamaan α dan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan riil untuk $n \geq 0$, yang konvergen ke α [8]. Selanjutnya dikatakan bahwa orde konvergensi dari deret adalah p, jika terdapat sebuah konstanta real $A \neq 0$ dan $p \geq 0$ maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha\,|}{|x_n - \alpha\,|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}\,|}{|e_n\,|^p} = A \tag{1}$$

Barisan tersebut dikatakan konvergen ke α dengan orde p. Konstanta A disebut konstanta kesalahan asimtotik (*asymptotic error constant*) [9]. Jika $p = 1$, $p = 2$ dan $p = 3$ maka orde kekonvergenan barisan tersebut secara berturut-turut dikenal dengan istilah linear, kuadratik, dan kubik. Jika $1 < p < 2$ maka orde kekonvergenan barisan dikenal dengan konvergensi superlinear [10].

Definisi 4 (Persamaan Tingkat Kesalahan)
Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ merupakan galat pada iterasi ke-n , *m*aka galat iterasi ke-$(n+1)$ didefenisikan [11]

$$e_{n+1} = Ae_n^p + O(e_n^{p+1}) \tag{2}$$

Persamaan (2) merupakan persamaan galat untuk setiap metode iterasi. Jika persamaan galat tersebut dapat ditentukan untuk sebarang metode iterasi, maka nilai p adalah orde konvergensi [19].

Teorema 2
Misalkan $g(x)$ dan $g'(x)$ kontinu di dalam selang $[a, b] = [\alpha - h, \alpha + h]$ yang mengandung titik tetap α dan nilai awal x_0 dipilih dalam selang tersebut [7]. Jika $|g'(x)| < 1$ untuk semua $x \in [a, b]$ maka iterasi $x_{n+1} = g(x_n)$, akan konvergen ke α. Pada kasus ini α disebut juga titik tetap atraktif. Jika $|g'(x)| > 1$ untuk semua $x \in [a, b]$ maka iterasi $x_{n+1} = g(x_n)$ akan divergen dari α.

Definisi 5 (Titik Tetap)
Titik x dinamakan sebagai titik tetap jika diberikan suatu fungsi G berlaku $G(x) = x$ [4].

Teorema 3
Jika f adalah suatu fungsi dengan Fungsi iterasi Newton N maka x_0 adalah akar dari f dengan multiplisitas k jika dan hanya jika x_0 adalah titik tetap atraktif dari N [4].

C. Hasil dan Pembahasan

Kekonvergenan Metode Newton-Raphson
Metode Newton-Raphson termasuk metode terbuka, dengan rumus iterasi yaitu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n) \tag{3}$$

Fungsi iterasi Newton didefinisikan oleh

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{4}$$

agar iterasi newton konvergen maka $|g'(x)| < 1$. Oleh karena itu, Metode Newton-Raphson akan konvergen bila

$$|g'(x)| = \left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$$

$$|f(x)f''(x)| < [f'(x)]^2 \tag{5}$$

dengan syarat $f'(x) \neq 0$

Jika α menyatakan akar sebenarnya dari $f(x)$ maka $f(\alpha) = 0$, sehingga dapat memilih interval yang sangat kecil. Di mana $f(x), f'(x)$, dan $f''(x)$ kontinu dan memenuhi kondisi yang diberikan oleh Persamaan (5). Sesuai dengan Teorema 2 dan 3, bahwa α adalah titik tetap atraktif dari fungsi iterasi Newton sehingga titik tersebut adalah akar dari f yang berarti iterasi newton akan konvergen ke akar yang sebenarnya [19].

Orde konvergensi dari Metode Newton Raphson dapat ditinjau menggunakan ekspansi deret Taylor [20]. Polinomial Taylor dari fungsi $f(x)$ yang akan ditentukan pada titik sekitar x_n, diasumsikan $f'(x_n) \neq 0$ sehingga diperoleh persamaan

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)(x - x_n)^2}{2} \tag{6}$$

Jika $f(x)$ mempunyai akar pada $x = \alpha$ maka $f(\alpha) = 0$, kemudian α disubstitusikan untuk x pada persamaan (6) sehingga diperoleh

$$\frac{-f''(x_n)(\alpha - x_n)^2}{2} = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n)$$

dengan membagi kedua ruas dengan $f'(x_n)$ sehingga diperoleh

$$\frac{-f''(x_n)(\alpha - x_n)^2}{2f'(x_n)} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (\alpha - x_n)$$

Menggunakan persamaan (3) diperoleh bentuk

$$\frac{-f''(x_n)(\alpha - x_n)^2}{2f'(x_n)} = \alpha - x_{n+1} \tag{7}$$

Jika $e_n = x_n - \alpha$ adalah notasi kesalahan pada iterasi ke-n maka persamaan (7) menjadi

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{-f''(x_n)}{2f\prime(x_n)}$$

Jika dalam fakta ini barisan titik hasil iterasi konvergen maka $\lim_{a\to\infty} f'(x_n) = f'(\alpha)$ dan $\lim_{a\to\infty} f''(x_n) = f''(\alpha)$ sehingga

$$\lim_{a\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{|-f''(x_n)|}{|2f'(x_n)|} \tag{8}$$

Merujuk pada persamaan (1) untuk metode iterasi Newton-Raphson yang dianalisis bahwa dari persamaan (8) didapatkan orde konvergensi $p = 2$ sehingga konvergensinya bersifat kuadratik. Berdasarkan definisi 2, $f'(\alpha) \neq 0$ karena α mempunyai multiplisitas 1.

Kekonvergenan Metode Secant

Metode Secant termasuk metode terbuka yang merupakan variasi dari metode Newton-Raphson yang tidak memerlukan turunan pertama, dengan rumus iterasi yaitu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{9}$$

Misalkan α adalah akar dari persamaan $f(x)$ maka $f(\alpha) = 0$. Jika kesalahan pada iterasi ke-n diberikan oleh persamaan $e_n = x_n - \alpha$ maka $x_n = e_n + \alpha$ dapat disubstitusikan pada rumus iterasi metode Secant persamaan (9) sehingga diperoleh

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(e_n+\alpha)(e_n-e_{n-1})}{f(e_n+\alpha)-f(e_{n-1}+\alpha)}$$

Ekspansi $f(e_n + \alpha)$ dan $f(e_{n-1} + \alpha)$ menggunakan deret Taylor yang dipotong hingga suku ketiga dengan $f(\alpha) = 0$, sehingga diperoleh

$$e_{n+1} = e_n - \frac{\left(f(\alpha)+f'(\alpha)e_n+\frac{f''(\alpha)}{2}e_n^2+\cdots\right)(e_n-e_{n-1})}{\left(f(\alpha)+f'(\alpha)e_n+\frac{f''(\alpha)}{2}e_n^2+\cdots\right)-\left(f(\alpha)+f'(\alpha)e_{n-1}+\frac{f''(\alpha)}{2}e_{n-1}^2+\cdots\right)}$$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n+\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}e_n^2+\cdots}{1+\frac{1}{2}(e_n-e_{n-1})\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}+\cdots}$$

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}e_n e_{n-1}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + O(e_n^2 e_{n-1} + e_n e_{n-1}^2) \tag{10}$$

Jika diasumsikan suku dengan notasi big O nilainya sangat kecil maka dapat diabaikan, sehingga persamaan (10) tereduksi menjadi

$$e_{n+1} = ce_n e_{n-1} \tag{11}$$

Di mana $c = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$

Persamaan (11) merupakan persamaan beda nonlinear yang dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan (1) di mana jika $n \to \infty$ maka $e_{n+1} = Ae_n^p$ dan $e_n = Ae_{n-1}^p$ sehingga bentuk persamaan $e_{n-1} = A^{-\frac{1}{p}}e_n^{\frac{1}{p}}$. Oleh karena itu, persamaan (11) menjadi

$$e_n^p = cA^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)} e_n^{\left(1+\frac{1}{p}\right)} \tag{12}$$

Persamaan (12) dapat digunakan untuk mencari besarnya orde konvergensi p pada metode Secant. Di mana *error* pada iterasi ke-n (e_n) pasti nilainya selalu sama sehingga besarnya $cA^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)}$ pada persamaan (12) haruslah sama dengan 1.

Jika $cA^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)} = 1$ maka $c = A^{\left(1+\frac{1}{p}\right)}$ dengan $c = \frac{e_{n+1}}{e_n e_{n-1}}$; $A = \frac{e_{n+1}}{e_n^p}$ dan $A = \frac{e_n}{e_{n-1}^p}$ sehingga diperoleh

$$e_n = e_n^{p-\frac{1}{p}} \tag{13}$$

Pada persamaan (13) karena c harus sama dengan $A^{\left(1+\frac{1}{p}\right)}$ berarti besarnya nilai e_n di kedua ruas harus sama sehingga dengan menyamakan pangkat e_n diperoleh

$$p = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \tag{14}$$

Dari persamaan (14) dengan mengambil akar dengan tanda positif agar istilah *error* asimtotik konvergen, maka $p = 1.618$ dan $e_{n+1} = Ae_a^{1.618}$. Oleh karena itu, orde konvergensi metode Secant $1 < p < 2$ sehingga konvergensinya bersifat superlinier.

Kekonvergenan Modifikasi Metode Newton-Raphson

Skema iterasi untuk mendapatkan formula modifikasi metode Newton-Raphson, ditulis sebagai [6]:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n + a(x_n)f(x_n))} = N(x_n) \tag{15}$$

atau

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x + a(x)f(x))} \tag{16}$$

di mana $a(x)$ adalah fungsi mulus.

Modifikasi metode Newton-Raphson dilakukan untuk menghindari masalah yang muncul ketika turunan pertama $f'(x_n)$ sama dengan nol atau mendekati nol. Jika dengan mengganti bentuk $f'(x_n)$ menjadi $f'(x_n + a(x_n)f(x_n))$ maka dapat menggeser titik evaluasi turunan ke posisi yang lebih tepat, sehingga metode iterasi tetap konvergen.

Jika α adalah akar dari persamaan $f(x)$ maka $f(\alpha) = 0$, sehingga

$$N(\alpha) = \alpha \tag{17}$$

Berdasarkan definisi 5 bahwa α pada persamaan (17) merupakan titik tetap sehingga fungsi tersebut seperti fungsi konstan. Jika $N'(\alpha) = 0 < 1$ maka modifikasi metode Newton-Raphson akan konvergen ke α. Berdasarkan teorema 2 bahwa α merupakan titik atraktif.

Fungsi $N(x)$ pada persamaan (16) dicari turunan keduanya untuk mengetahui besarnya fungsi $a(x)$. Jika $N''(\alpha) = 0$ maka $a(\alpha) = -\frac{1}{2f'(\alpha)}$ sehingga

$$a(x_n) = -\frac{1}{2f'(x_n)} \tag{18}$$

Formula iterasi modifikasi metode Newton-Raphson diberikan oleh persamaan (15) dengan mensubstitusikan persamaan (18) sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \tag{19}$$

Persamaan (19) merupakan rumus iterasi modifikasi metode Newton-Raphson yang berlaku secara umum, di mana dapat digunakan untuk pencarian akar dengan multiplisitas lebih dari atau sama dengan satu dan berhingga [4].

Jika $e_n = x_n - \alpha$ maka $x_n = e_n + \alpha$ sehingga bentuk x_n pada persamaan (15) dapat diubah menjadi

$$x_{n+1} = N(e_n + \alpha) \tag{20}$$

Ekspansi fungsi $N(e_n + \alpha)$ di sekitar α dengan menggunakan deret Taylor sehingga diperoleh

$$N(e_n + \alpha) = N(\alpha) + N'(\alpha)e_n + \frac{N''(\alpha)}{2!}e_n^2 + \frac{N'''(\alpha)}{3!}e_n^3 + \cdots \tag{21}$$

Persamaan (21) disubstitusikan ke persamaan (20), diperoleh

$$x_{n+1} = N(\alpha) + N'(\alpha)e_n + \frac{N''(\alpha)}{2!}e_n^2 + \frac{N'''(\alpha)}{3!}e_n^3 + \cdots$$

$$e_{n+1} = \frac{N'''(\alpha)}{3!}e_n^3 + O(e_n^4) \tag{22}$$

Jika deret Taylor dipotong hingga suku ke 4 maka e_n^4 dan pangkat lebih tinggi dari e_n^4 diabaikan, Persamaan (24) tereduksi menjadi

$$e_{n+1} = Ae_n^3 \tag{23}$$

di mana $A = \frac{1}{3!}N'''(\alpha)$

Persamaan (23) memiliki orde konvergensi $p = 3$ sehingga laju konvergensi modifikasi metode Newton-Raphson bersifat nonlinear yaitu kubik.

Kekonvergenan Modifikasi Metode Secant

Prinsip dasar dari metode Secant adalah menggunakan dua nilai titik awal untuk membentuk sebuah garis secant yang mendekati kurva fungsi, kemudian memotong sumbu x untuk mendapatkan titik perkiraan baru. Namun, daripada menggunakan dua nilai sembarang untuk memperkirakan turunannya, terdapat pendekatan alternatif melibatkan gangguan pecahan *(fractional perturbation)* dari variabel independen untuk memperkirakan $f'(x)$ [12].

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_n + \delta x_n) - f(x_n)}{\delta x_n} \tag{24}$$

Di mana $\delta =$ *fractional perturbation* (bilangan kecil). Kesamaan bentuk (24) dapat disubstitusikan ke persamaan (3) untuk menghasilkan rumus iterasi modifikasi metode Secant.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\delta x_n f(x_n)}{f(x_n + \delta x_n) - f(x_n)} \tag{25}$$

Persamaan (25) merupakan rumus iterasi modifikasi metode Secant. Metode ini merupakan kombinasi dari metode Newton-Raphson dan metode Secant.

Dari persamaan (25) bentuk $f(x_n + \delta x_n)$ dapat diekspansi dengan menggunakan deret Taylor yang dipotong hingga suku ketiga, sehingga untuk $f(x_n + \delta x_n)$ di sekitar x_n.

$$f(x_n + \delta x_n) - f(x_n) = \delta x_n f'(x_n) + \frac{(\delta x_n)^2}{2} f''(x_n) \tag{26}$$

Persamaan (26) disubstitusikan ke persamaan (25) sehingga diperoleh persamaan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{\delta x_n}{2} f''(x_n)} \tag{27}$$

Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x)$, sehingga $f(\alpha) = 0$. Ekspansi fungsi $f(x_n)$ di sekitar α dengan deret Taylor yang dipotong hingga suku ketiga, sehingga diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2} e_n^2 \tag{28}$$

Oleh karena itu, persamaan (27) menjadi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2} e_n^2}{f'(\alpha) + \frac{\delta x_n}{2} f''(\alpha)} \tag{29}$$

Diasumsikan jika δx_n kecil maka $\frac{\delta x_n}{2} f''(\alpha)$ juga kecil. Dalam limit $\delta x_n \to 0$, sehingga $\frac{\delta x_n}{2} f''(\alpha)$ dapat diabaikan dan persamaan (29) tereduksi menjadi

$$x_{n+1} = x_n - e_n - \frac{f''(\alpha)e_n^2}{2f'(\alpha)} \tag{30}$$

jika $e_n = x_n - \alpha$ maka $x_n = e_n + \alpha$ sehingga dengan mengganti x_{n+1} dan x_n pada persamaan (30) diperoleh

$$e_{n+1} = -\frac{f''(\alpha)e_n^2}{2f'(\alpha)}$$

Jika barisan titik hasil iterasi konvergen maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \left| -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| \tag{31}$$

Merujuk dari persamaan (1) untuk modifikasi metode secant yang dianalisis bahwa dari persamaan (31) didapatkan orde konvergensi $p = 2$ sehingga konvergensinya bersifat kuadratik. Konvergensi modifikasi metode Secant, jika selama δx_n nilainya cukup kecil maka metode ini akan memiliki konvergensi yang kuadratik.

Hasil Analisis Kekonvergenan

Hasil analisis kekonvergenan dari metode Newton-Raphson, metode Secant, modifikasi metode Newton-Raphson, dan modifikasi metode Secant disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil Analisis Kekonvergenan Metode

Metode	**Persamaan Tingkat Kesalahan**	**Orde (p)**	**Konvergensi**
Newton-Raphson	$e_{n+1} = Ae_n^2$	2	Kuadratik

Metode	**Persamaan Tingkat Kesalahan**	**Orde (p)**	**Konvergensi**
Secant	$e_{n+1} = Ae_n^{1.618}$	1.618	Superlinear
Modifikasi Newton Raphson	$e_{n+1} = Ae_n^3$	3	Kubik
Modifikasi Secant	$e_{n+1} = Ae_n^2$	2	Kuadratik

Berdasarkan Tabel 1 di atas, pada masing-masing metode, berkurangnya galat iterasi selanjutnya bergantung pada faktor pengali konstanta kesalahan asimtotik A. Di mana besarnya A berbeda untuk setiap kasus bergantung pada fungsi yang dicari akar solusi persamaannya.

Simulasi Numerik

Diberikan fungsi polinomial yang akan dicari akar solusi persamaannya. Akar dari fungsi ini merupakan akar dengan multiplisitas satu. Uji simulasi numerik dilakukkan dengan menggunakan Matlab. Iterasi akan berhenti ketika galat relatif hampiran $\varepsilon_a = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{x_n} < \varepsilon_s$ dengan $\varepsilon_s = 10^{-6}$.

Tabel 2. Perbandingan Hasil Iterasi Fungsi $f(x) = x^5 - 5x^2 + 7x - 3,\ x_0 = 0.1$

n	Metode NR		Metode Secant		Modifikasi NR		Modifikasi Secant	
	x_{n+1}	ε_a	x_{n+1}	ε_a	x_{n+1}	ε_a	x_{n+1}	ε_a
1	0.49163236	0.79659598	0.67624629	0.26062441	1.22331734	0.91825506	0.49163240	0.79659599
2	0.80242092	0.38731363	0.91215449	0.25862746	0.86726256	0.41055016	0.80242120	0.38731380
3	1.05967627	0.24276786	1.03864581	0.12178484	0.98579348	0.12023910	1.05967621	0.24276756
4	1.00821666	0.05104023	0.99149072	0.04755978	0.99951832	0.01373145	1.00821678	0.05104005
5	1.00016732	0.00804799	0.99919318	0.00770867	0.99999942	0.00048110	1.00016735	0.00804809
6	1.00000007	0.00016725	1.00001724	0.00082405	1.00000000	0.00000058	1.00000007	0.00016728
7	1.00000000	0.00000007	0.99999997	0.00001727			1.00000000	0.00000007
8			1.00000000	0.00000003				

Tabel 3. Perbandingan Hasil Iterasi Fungsi $f(x) = x^4 - 4x^2 - 3x + 5,\ x_0 = 1.8$

n	Metode NR		Metode Secant		Modifikasi NR		Modifikasi Secant	
	x_{n+1}	ε_a	x_{n+1}	ε_a	x_{n+1}	ε_a	x_{n+1}	ε_a
1	2.28286100	0.21151572	1.93890426	0.28938806	1.93735950	0.07090037	2.28285873	0.21151494
2	2.11325722	0.08025704	2.01161414	0.03614505	2.04162408	0.05106943	2.11325683	0.08025617
3	2.07174879	0.02003546	2.08193195	0.03377527	2.06824021	0.01286897	2.07174886	0.02003523
4	2.06933094	0.00116842	2.06828404	0.00659866	2.06932135	0.00052246	2.06933095	0.00116845
5	2.06932295	0.00000386	2.06930527	0.00049351	2.06932295	0.00000077	2.06932295	0.00000387
6	2.06932295	0.00000000	2.06932297	0.00000856			2.06932295	0.00000000
7			2.06932295	0.00000001				

Berdasarkan hasil simulasi pada Tabel 2 dan 3 menunjukkan bahwa modifikasi metode Newton-Raphson dapat lebih cepat konvergen. Hal ini karena modifikasi metode Newton-Raphson konvergen secara kubik. Di mana galat yang dihasilkan pada tiap iterasi perubahan galatnya semakin kecil yaitu galat berkurang dengan pangkat tiga dari galat iterasi sebelumnya. Sedangkan metode Newton-Raphson dan modifikasi metode Secant konvergen secara kuadratik. Di mana galat yang dihasilkan pada tiap iterasi perubahan galatnya semakin kecil yaitu galat berkurang dengan laju kuadrat dari galat iterasi sebelumnya. Metode Secant dapat konvergen lebih lambat karena memiliki konvergensi superlinear. Di mana galat yang dihasilkan pada tiap iterasi perubahan galatnya semakin kecil yaitu galat berkurang dengan pangkat 1.618 dari galat iterasi sebelumnya.

D. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam penelitian ini, peneliti menyimpulkan bahwa modifikasi dari masing-masing metode menunjukkan peningkatan besarnya orde konvergensi daripada sebelum metode dimodifikasi. Metode dengan orde konvergensi (p) yang semakin besar memberikan indikasi tingkat konvergensi akan semakin cepat karena galat berkurang lebih cepat pada tiap iterasi. Walaupun demikian besar kecilnya galat yang dihasilkan tergantung pada fungsi yang dicari akar solusi persamaannya.

Daftar Pustaka

[1] M. Panjaitan, "Pemahaman Metode Numerik Menggunakan Pemprogrman Matlab (Studi Kasus : Metode Secant)," Jurnal Teknologi Informasi, vol. 1, no. 1, 2017.

[2] P. Batarius, A. Aristo J, and Sinlae, "Nilai Awal pada Metode Secant yang Dimodifikasi dalam Penentuan Akar Ganda Persamaan Non-Linear," Jurnal Ilmiah MATRIK, vol. 21, no. 1, Apr. 2019.

[3] S. Putra, D. A. Arvina, and M. Imran, "Kombinasi Metode Newton dengan Metode Secant untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear," vol. 2, pp. 23–29, 2011.

[4] G. Gunawan, "Multiplisitas Newton dan Titik Tetap Atraktif dalam Menentukan Kekonvergenan," Jurnal Ilmiah MATRIK, vol. 22, no. 3, pp. 333–338, Dec. 2020.

[5] A. Agustina and Wartono, "Modifikasi Metode Iterasi Berorde Tiga dengan Orde Konvergensi Optimal," Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika, vol. 23, no. 1, pp. 15–26, 2023.

[6] R. V Dukkipati, Numerical Methods. New Age International Limited, 2010.

[7] R. Munir, Metode Numerik. Bandung: Informatika Bandung, 2015.

[8] L. Fatmawati and Wartono, "Orde Konvergensi Varian Metode Hansen-Patrick Dua Parameter Untuk Menyelesaian Persamaan Nonlinear," Prosiding SainsTeKes Semnas MIPAKes UMRi, vol. 1, pp. 16–23, Aug. 2019.

[9] Z. Lega, Agusni, and S. Putra, "Metode Iterasi Tiga Langkah dengan Orde Konvergensi Lima Untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear Berakar Ganda," JOM FMIPA, vol. 1, no. 2, pp. 91–101, Oct. 2014.

[10] J. R. Senning, "Computing and Estimating the Rate of Convergence," Department of Mathematics and Computer Science, Gordon College, 2019.

[11] J. R. Sharma, R. K. Guha, and R. Sharma, "Some modified Newton's methods withfourth-order convergence," Pelagia Research Library, vol. 2, no. 1, pp. 240–247, 2011.

[12] S. C. Chapra and R. P. Canale, Numerical Methods for Engineers, Seventh. New York: McGraw-Hill Education, 2015

[13] S. A. Savitri and D. Suhaedi, "Penerapan Inference Fuzzy Mamdani dalam Seleksi Penerima Bantuan Sosial Tunai Kabupaten Belitung Timur," J. Ris. Mat., pp. 163–172, Dec. 2022, doi: 10.29313/jrm.v2i2.1383.

[14] G. Enzellina and D. Suhaedi, "Penggunaan Metode Principal Component Analysis dalam Menentukan Faktor Dominan," J. Ris. Mat., pp. 101–110, Dec. 2022, doi: 10.29313/jrm.v2i2.1192.

[15] Y. P. Yulinar and G. Gunawan, "Metode Sainte Lague untuk Konversi Suara terhadap Kursi Parlemen pada Pileg," J. Ris. Mat., vol. 4, no. 1, pp. 29–36, Jun. 2024, doi: 10.29313/jrm.v4i1.3599.

[16] Hana Mumtaz and I. Sukarsih, "Taksiran Matriks Teknologi untuk Menentukan Sektor Unggulan di Suatu Wilayah Menggunakan Metode RAS," J. Ris. Mat., vol. 1, no. 2, pp. 137–144, Feb. 2022, doi: 10.29313/jrm.v1i2.485.

[17] S. T. Utami Putri and E. Kurniati, "Prediksi Harga Saham Menggunakan Jump Diffusion Model dan Analisis Value at Risk," J. Ris. Mat., pp. 131–140, Dec. 2023, doi: 10.29313/jrm.v3i2.2832.

[18] G. N. Fawzi and Y. Ramdani, "Analisis Model Getaran Pegas Teredam Kendaraan Bermotor dengan Metode Runge-Kutta Gill dan Milne," J. Ris. Mat., no. 1, pp. 17–28, Jun. 2024, doi: 10.29313/jrm.v4i1.3598.

[19] S. Fratama and E. Kurniati, "Penerapan Model CAPM dan Arbitrage Pricing Theory dalam Menghitung Return Indeks Saham IDX30," J. Ris. Mat., pp. 37–44, Jul. 2023, doi: 10.29313/jrm.v3i1.1736.

[20] S. Zein and G. Gunawan, "Prediksi Hasil FIFA World Cup Qatar 2022 Menggunakan Machine Learning dengan Python," J. Ris. Mat., pp. 153–162, Dec. 2022, doi: 10.29313/jrm.v2i2.1382.