

## Analisis Model Getaran Pegas Teredam Kendaraan Bermotor dengan Metode *Runge-Kutta Gill* dan *Milne*

Gilang Nitiasya Fawzi, Yani Ramdani\*

*Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Islam Bandung, Indonesia.*

### ARTICLE INFO

#### Article history :

Received : 28/03/2024  
Revised : 23/05/2024  
Published : 10/06/2024



Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Volume : 4  
No. : 1  
Halaman : 19-28  
Terbitan : **Juli 2024**

### ABSTRAK

Persamaan model getaran pada pegas teredam merupakan persamaan diferensial biasa (PDB) yang dapat diselesaikan menggunakan metode analitik dan metode numerik. Tujuan skripsi ini adalah menentukan penyelesaian numerik dari persamaan getaran pegas teredam pada kendaraan bermotor dengan menggunakan metode Runge-Kutta Gill dan metode Milne dengan perhitungan secara analitik sebagai pembandingan. Hasil pengolahan data menunjukkan bahwa (1) Penyelesaian secara analitik, pegas berosilasi dan mencapai titik setimbang pada waktu  $t = 4$  dengan regangan maksimum tercapai pada nilai 4,62 yang kemudian mengecil seiring waktu. (2) Penyelesaian secara numerik dari persamaan getaran pegas teredam pada kendaraan bermotor dengan menggunakan metode Runge-Kutta Gill tampak berosilasi dan mencapai titik setimbang  $t = 4$  dengan regang maksimal pada nilai 4 untuk posisi  $x$  terhadap waktu, 13,5692 untuk kecepatan terhadap waktu dan galat paling besar yaitu 0,6200. (3) Penyelesaian secara numerik dari persamaan getaran pegas teredam pada kendaraan bermotor dengan menggunakan metode Milne tampak pegas setimbang pada  $t = 2$  dengan regang maksimal pada nilai 4,0163 untuk posisi  $x$  terhadap waktu, 11,8406 untuk kecepatan terhadap waktu dan galat paling besar yaitu 0.6202.

**Kata Kunci :** Getaran Pegas Teredam; Analitik; Metode Runge Kutta Gill.

### ABSTRACT

The vibration model equation in a damped spring is an ordinary differential equation (PDB) which can be solved using analytical methods and numerical methods. The aim of this thesis is to determine the numerical solution of the damped spring vibration equation in motorized vehicles using the Runge-Kutta Gill method and the Milne method with analytical calculations as a comparison. The results of data processing show that (1) Analytically resolved, the spring oscillates and reaches the equilibrium point at time  $t = 4$  with the maximum strain reached at a value of 4.62 which then decreases over time. (2) Numerical solution of the damped spring vibration equation in a motor vehicle using the Runge-Kutta Gill method. Gill appears to oscillate and reach the equilibrium point  $t = 4$  with a maximum strain at a value of 4 for position  $x$  versus time, 13.5692 for velocity versus time and The largest error is 0.6200. (3) Numerical solution of the damped spring vibration equation in motor vehicles using the Milne method shows that the spring is in balance at  $t = 2$  with a maximum strain of 4.0163 for position  $x$  versus time, 11.8406 for velocity versus time and the largest error namely 0.6202.

**Keywords :** Simulation of Runge Kutta Gill Method; Milne Method; Damped Spring Vibration.

Copyright© 2024 The Author(s).

## A. Pendahuluan

Kendaraan bermotor menjadi transportasi yang digunakan oleh masyarakat, dengan kenyamanan serta keamanan menjadi faktor utama dalam pemilihan kendaraan. Pegas sebagai komponen yang menerima beban dinamis dan memiliki sifat elastis, berfungsi untuk menjaga keseimbangan dan kembali ke posisi semula setelah mendapat gaya eksternal. Getaran pada pegas terbagi menjadi dua jenis, yakni gerak harmonik sederhana dan gerak harmonik teredam. Gerak harmonik sederhana adalah getaran yang berlangsung kontinu tanpa hambatan atau redaman, sementara gerak harmonik teredam melibatkan faktor-faktor yang mengurangi getaran, seperti gaya gesek udara dan faktor internal [1]. Matematika, sebagai ilmu deduktif yang memiliki konsep bersifat hierarkis, terstruktur, logis dan sistematis dari konsep yang paling sederhana sampai konsep yang paling kompleks [2], memainkan peran vital dalam pemodelan getaran pada pegas teredam dengan persamaan diferensial biasa (PDB). Penyelesaian PDB dapat dilakukan dengan metode analitik dan metode numerik seperti metode Runge-Kutta Gill dan metode Milne menjadi pilihan untuk pendekatan numerik dalam menyelesaikan masalah getaran pada pegas.

Berdasarkan uraian diatas, maka perumusan masalah dalam penelitian ini adalah, “Bagaimana penyelesaian numerik dari persamaan getaran pegas teredam pada kendaraan bermotor dengan menggunakan metode Runge-Kutta Gill dan metode Milne?” Selanjutnya, tujuan dalam penelitian ini adalah untuk mengetahui penyelesaian numerik persamaan getaran pegas teredam pada kendaraan bermotor dengan menggunakan metode Runge-Kutta Gill dan metode Milne. Bentuk persamaan getaran pegas yang digunakan adalah getaran pada kendaraan sepeda motor dengan merk Jupiter Z tahun 2004.

## B. Metode Penelitian

### Hukum Kedua Newton

Gaya total pada sebuah benda adalah penyebab mengapa benda mengalami percepatan [3]. Percobaan menunjukkan bahwa jika kombinasi gaya-gaya  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$  diberikan pada sebuah benda, dengan  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots$  adalah gaya-gaya yang bekerja pada sebuah benda, maka benda tersebut akan memiliki percepatan [4]. Newton mengemas semua hubungan ini dalam hukum kedua Newton tentang gerak, yaitu jika suatu gaya luar total bekerja pada sebuah benda maka benda akan mengalami percepatan. Arah percepatan tersebut sama dengan arah gaya total. Vektor gaya total sama dengan massa benda dikalikan dengan percepatan benda memiliki bentuk persamaan:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

Dimana  $\sum \vec{F}$  adalah vektor gaya total,  $m$  adalah masa benda dan  $\vec{a}$  adalah percepatan benda. Pernyataan alternatifnya adalah bahwa percepatan benda (perubahan kecepatan rata-rata) sama dengan jumlah (resultan) vektor dari semua gaya yang bekerja pada benda, dibagi dengan massanya [5]. Dalam bentuk persamaan:

$$\frac{\sum F}{m} = a \quad (2)$$

### Hukum Hooke

Pegas dapat diatur kalibrasinya untuk peregangan atau penekanan  $\Delta x$  (perubahan panjang pegas) melalui gaya yang diperlukan guna menghasilkan peregangan atau penekanan tersebut. Secara eksperimen ditemukan bahwa, untuk  $\Delta x$  yang kecil, gaya yang dikerjakan oleh pegas mendekati sebanding dengan  $\Delta x$  dan dalam arah berlawanan. Hubungan ini, dikenal sebagai Hukum Hooke yang dapat ditulis,

$$F_x = -k(x - x_0) = -k\Delta x \quad (3)$$

Dengan konstanta  $k$  disebut konstanta gaya pegas. Titik  $x$  adalah koordinat ujung pegas atau benda yang diikatkan pada ujung pegas tersebut. Konstanta  $x_0$  adalah nilai koordinat jika pegas tidak diregangkan dari posisi kesetimbangannya. Gaya semacam itu dinamakan gaya pemulih karena gaya ini cenderung memulihkan pegas ke konfigurasi awalnya [6].

**Osilasi**

Osilasi terjadi apabila sebuah sistem menerima gangguan dari posisi kesetimbangan stabilnya dengan gerakan yang bersifat berulang. Banyak contoh osilasi yang mudah dikenali, misalnya perahu kecil yang berayun turun naik, bandul jam yang berayun ke kiri dan ke kanan, dan senar gitar yang bergetar. Suatu sistem yang menunjukkan gejala gerak harmonik sederhana adalah sebuah benda yang tertambat ke sebuah pegas [7].

**Persamaan Sistem dengan Peredam**

Gaya redaman mempunyai arah yang berlawanan dengan gerak benda saat itu dan dianggap bahwa gaya ini sebanding dengan kecepatan,

$$y' = \frac{dy}{dt} \tag{4}$$

Dari benda itu. Jadi gaya redamannya berbentuk,

$$F_3 = -cy' \tag{5}$$

Dengan konstanta redaman c positif. Resultan gaya yang bekerja pada benda adalah

$$F_1 + F_2 + F_3 = -ky - cy' \tag{6}$$

Sehingga menurut hukum kedua Newton,

$$my'' = -ky - cy' \tag{7}$$

Dan lihat bahwa sistem mekanis teredam ditentukan oleh persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan,

$$my'' + ky + cy' = 0 \tag{1} [6] \tag{8}$$

**Sistem Suspensi Pada Motor**

Sistem suspensi pada kendaraan terutama sepeda motor berfungsi sebagai alat peredam kejutan ketika kendaraan bergerak. Suspensi juga berfungsi menjaga keseimbangan sepeda motor sehingga mudah untuk dikendalikan. Dengan demikian tugas utama dari suspensi agar pengendara dapat merasa nyaman dengan berkurangnya guncangan yang diakibatkan kontur jalan, mengurangi getaran akibat kerja mesin dan penyetabil kendaraan saat berbelok [8].

**Metode Runge Kutta Gill (RKG)**

Metode Runge-Kutta Gill (RKG) tergolong dalam keluarga metode Runge- Kutta orde empat. Metode Runge-Kutta Gill (RKG) memiliki empat konstanta perhitungan antara, yang dikombinasikan dengan konstanta-konstanta lain  $r, s, t, u$ . Metode Runge-Kutta Gill mempunyai bentuk sebagai berikut,

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + k_4) + \frac{1}{3}(sk_2 + uk_3) \tag{9}$$

Dengan,

$$k_1 = hf(t_i, x_i) \tag{10}$$

$$k_2 = hf(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1) \tag{11}$$

$$k_3 = hf(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + rk_1 + sk_2) \tag{12}$$

$$k_4 = hf(t_i + h, x_i + tk_2 + uk_3) \tag{13}$$

$$r = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \tag{14}$$

$$s = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \tag{15}$$

$$t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{16}$$

$$u = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{17}$$

Dengan,

$$i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

$n$  = banyak langkah atau iterasi

### Metode Milne

Metode milne merupakan salah satu metode banyak langkah, disebut demikian karena dibutuhkan lebih dari satu nilai  $f(t, x(t))$ . Tujuan utama metode banyak langkah adalah menggunakan informasi dari beberapa titik sebelumnya,  $x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_1$ , untuk menghitung taksiran nilai  $x_{i+1}$  yang lebih baik. Metode Milne menggunakan persamaan prediktor untuk menaksir nilai  $x_{i+1}$  dari  $f_{i-3}, f_{i-2}, f_{i-1}$  dan  $f_i$ , sedangkan persamaan korektor digunakan untuk menghitung nilai  $x_{i+1}$  yang lebih baik. Persamaan prediktor pada metode Milne dihampiri dengan polinomial Lagrange, titik-titik yang digunakan adalah  $t_{i-3}, t_{i-2}, t_{i-1}$  dan  $t_i$ . Dari empat titik tersebut, maka dapat dibentuk menjadi sebagai berikut:

$$f(x, t(x)) = \frac{(t - t_{i-2})(t - t_{i-1})(t - t_i)f_{i-3}}{(t_{i-3} - t_{i-2})(t_{i-3} - t_{i-1})(t_{i-3} - t_i)} + \frac{(t - t_{i-3})(t - t_{i-1})(t - t_i)f_{i-2}}{(t_{i-2} - t_{i-3})(t_{i-2} - t_{i-1})(t_{i-2} - t_i)} \tag{18}$$

$$+ \frac{(t - t_{i-3})(t - t_{i-2})(t - t_i)f_{i-1}}{(t_{i-1} - t_{i-3})(t_{i-1} - t_{i-2})(t_{i-1} - t_i)} + \frac{(t - t_{i-3})(t - t_{i-2})(t - t_{i-1})f_i}{(t_i - t_{i-3})(t_i - t_{i-2})(t_i - t_{i-1})}$$

$$f(x, t(x)) = \frac{1}{-6h^3}(t - t_{i-2})(t - t_{i-1})(t - t_i)f_{i-3}$$

$$+ \frac{1}{2h^3}(t - t_{i-3})(t - t_{i-1})(t - t_i)f_{i-2}$$

$$- \frac{1}{2h^3}(t - t_{i-3})(t - t_{i-2})(t - t_i)f_{i-1}$$

$$+ \frac{1}{2h^3}(t - t_{i-3})(t - t_{i-2})(t - t_{i-1})f_i$$

Kemudian  $f(x, t(x))$  disubstitusikan ke persamaan,

$$x_{i+1} = x_{i-3} + \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} f(x, t(x)) dt \tag{19}$$

Dan diintegrasikan, sehingga didapat persamaan prediktor,

$$x_{i+1} = x_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i) \tag{20}$$

Kemudian untuk persamaan korektor, nilai  $f(x, t(x))$  juga dihampiri dengan polinomial Lagrange. Namun titik yang digunakan adalah  $t_{i-1}, t_i$  dan  $t_{i+1}$ . Maka dapat dibentuk menjadi:

$$f(x, t(x)) = \frac{(t - t_i)(t - t_{i+1})f_{i-1}}{(t_{i-1} - t_i)(t_{i-1} - t_{i+1})} + \frac{(t - t_{i-1})(t - t_{i+1})f_i}{(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})} + \frac{(t - t_{i-1})(t - t_i)f_{i+1}}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)} \tag{21}$$

$$f(x, t(x)) = \frac{1}{2h^2}(t - t_i)(t - t_{i+1})f_{i-1} - \frac{1}{h^2}(t - t_{i-1})(t - t_{i+1})f_i + \frac{1}{2h^2}(t - t_{i-1})f_{i+1}$$

Kemudian  $f(x, t(x))$  disubstitusikan ke persamaan

$$x_{i+1} = x_{i-3} + \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} f(x, t(x)) dt \tag{22}$$

Dan diintegrasikan dengan menggunakan batas  $[t_{i-1}, t_{i+1}]$  sehingga didapat persamaan korektor [8].

$$x_{i+1} = x_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) \tag{23}$$

**MATLAB**

*MATLAB* adalah perangkat lunak pemrograman dan analisis matriks. Diperkenalkan pada 1970, awalnya untuk aljabar linear, sekarang berkembang dengan fungsi dan performa komputasi. Digunakan di akademis dan industri untuk analisis data, pengembangan algoritma, pemodelan, dan visualisasi. User-friendly, dapat beroperasi di berbagai sistem operasi, dan terhubung dengan bahasa pemrograman lain. *Toolbox* yang tersedia menyediakan aplikasi khusus seperti pengolahan sinyal, sistem kontrol, logika fuzzy, jaringan saraf tiruan, optimasi, pengolahan citra digital, bioinformatika, dan simulasi. [9]

**C. Hasil dan Pembahasan**

Data atau spesifikasi suspensi yang akan digunakan berdasarkan kepada penelitian Suhandoko [10] dengan Massa Pengendara sebesar 60 kg.

**Tabel 1.** Data Suspensi Depan Motor Jupiter Z tahun 2004

No	Parameter	Simbol	Data/Nilai		Satuan
			Depan	Belakang	
1	Kekakuan suspensi	$k_1$	4534,46	9400	N/m
2	Kekakuan roda	$k_2$	4568	10020	N/m
3	Redaman suspensi	$c$	532,8	940	Ns/m
4	Massa body depan	$m_v$	63	96	Kg
5	Massa roda	$m_w$	4,6	6,2	Kg
6	Gangguan jalan	$r$	4.62	4.46	dB

$m_{eq}$  adalah massa total,  $m_v$  adalah massa kendaraan,  $m_r$  adalah massa pengendara memiliki bentuk

$$m_{eq} = m_v + m_r$$

$$m_{eq} = ((63 + 4,6) + (94 + 6,2)) + 60 = 227,8$$

Berdasarkan persamaan (1), sistem mekanis teredam ditentukan oleh persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan untuk mendapatkan kesetimbangan

$$\sum F = 0$$

$$\sum F = (k_s + k_t)x + c \cdot x' + m \cdot x'' = 0$$

$$((4534,46 + 9400) + (4568 + 10020))x + (532,8 + 940)x' + 227,8x'' = 0$$

$$28522,46x + 1472,8x' + 227,8x'' = 0$$

Persamaan differensial biasa untuk model getaran pegas

$$m_{eq} \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Akan digunakan  $m_{eq} = 227,8$  kg,  $c = 1472,8$  Ns/m,  $k = 28522,46$  N/m.

$$227,8 \frac{d^2x}{dt^2} + 1472,8 \frac{dx}{dt} + 28522,46x = 0$$

Asumsikan salah satu solusi dari persamaan diferensial biasa (4) adalah  $t = e^{kx}$

Persamaan karakteristik, yaitu

$$(227,8k^2 + 1472,8k + 28522,46)e^{kx} = 0$$

Jika  $e^{kx} = 0$  maka akan diperoleh  $k \rightarrow -\infty$

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} e^{kx} = 0$$

$$e^{-\infty x} = \frac{1}{e^{\infty x}}$$

Akibatnya  $e^{kx} \neq 0$

Sehingga persamaan karakteristik yang diperoleh adalah

$$k^2 + 6,4653k + 125,2083 = 0$$

Diskriminan dari persamaan kuadrat persamaan karakteristik adalah

$$D = 6,4653^2 - 4(125,2083) = -459,0331$$

Diperoleh diskriminan ( $D = c^2 - 4mk < 0$ ). Maka akar – akar persamaan (4) berupa bilangan kompleks. Akar – akar dari persamaan karakteristik, yaitu

$$k_{1,2} = \frac{-6,4653 \pm \sqrt{-459,0331}}{2}$$

$$k_1 = -3,23265 + 10,71252 i, k_2 = -3,23265 - 10,71252 i$$

Maka solusi umum dari persamaan (4) adalah

$$x(t) = e^{-3,23265t} (c_1 \cos(10,71252t) + c_2 \sin(10,71252t))$$

Diasumsikan nilai awal  $x(0) = 4,62$  dan  $x'(0) = 4,46$ , maka dapat ditentukan nilai  $c_1$  dan  $c_2$ , yaitu

Penyelesaian Umum

$$x(t) = e^{-3,23265t} (c_1 \cos(10,71252t) + c_2 \sin(10,71252t))$$

Untuk  $t = 0$  maka diperoleh

$$x(0) = e^{-3,23265(0)} (c_1 \cos(10,71252(0)) + c_2 \sin(10,71252(0)))$$

$$c_1 = 4,62$$

Untuk syarat awal  $x(0) = 0$  maka  $c_1 = 4,62$

Turunan pertama dari (5)

$$x(t) = e^{-3,23265t} (c_1 \cos(10,71252t) + c_2 \sin(10,71252t))$$

$$x'(t) = u'v + uv'$$

Misalkan :

$$u = e^{-3,23265t}$$

$$u' = -3,23265e^{-3,23265t}$$

$$v = c_1 \cos(10,71252t) + c_2 \sin(10,71252t)$$

$$v' = -10,71252c_1 \sin(10,71252t) + c_2 \cos(10,71252t) 10,71252$$

$$x'(t) = (-3,23265e^{-3,23265t} (c_1 \cos(10,71252t) + c_2 \sin(10,71252t)))$$

$$+ (e^{-3,23265t} (-10,71252c_1 \sin(10,71252t) + c_2 \cos(10,71252t) 10,71252))$$

$$x'(t) = (-3,23265 c_1 + 10,71252c_2) e^{-3,23265t} \cos(10,71252t) + (-10,71252c_1 - 3,23265c_2) e^{-3,23265t} \sin(10,71252t)$$

Untuk  $x'(0) = 4,46$  dan  $c_1 = 4,62$  maka

$$4,46 = -3,23265 c_1 + 10,71252c_2) e^{-3,23265(0)} \cos(10,71252(0)) + (-10,71252 c_1 - 3,23265 c_2) e^{-3,23265(0)} \sin(10,71252(0))$$

$$4,46 = (-3,23265 c_1 + 10,71252 c_2) 1 \times 1 + (-10,71252 c_1 - 3,23265 c_2) 1 \times 0$$

$$4,46 = -14,934843 + 10,71252 c_2$$

$$19,394843 = 10,71252 c_2$$

$$c_2 = 1,81048$$

Penyelesaian Khusus

$$x(t) = e^{-3,23265t} (4,62 \cos(10,71252t) + 1,81048 \sin(10,71252t))$$

Penyelesaian PDB model getaran dengan metode Runge-Kutta Gill

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Transformasi model getaran pegas menjadi persamaan diferensial biasa orde-1 dengan pemisalan:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx + c \frac{dx}{dt} = 0$$

$$m \frac{dv}{dt} + kx + c \cdot v = 0$$

$$m \frac{dv}{dt} = -kx - cv$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}v$$

Maka bentuk sistem persamaan diferensial orde satu, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, v) = v$$

$$\frac{dv}{dt} = g(t, x, v) = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}v$$

Metode Runge-Kutta Gill mempunyai bentuk sebagai berikut.

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + k_4) + \frac{1}{3}(sk_2 + uk_3)$$

Dengan

$$k_1 = hf(t_i, x_i, v_i) = hv_i$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1, v_i + \frac{1}{2}l_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + rk_1 + sk_2, v_i + \frac{1}{2}l_2\right)$$

$$k_3 = h\left(v_i + \frac{1}{2}l_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(t_i + h, x_i + tk_2 + uk_3, v_i + \frac{1}{2}l_3\right)$$

$$k_4 = h\left(v_i + \frac{1}{2}l_3\right)$$

$$l_1 = hg(t_i, x_i, v_i) = h\left(-\frac{k}{m}x_i - \frac{c}{m}v_i\right)$$

$$l_2 = hg\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1, v_i + \frac{1}{2}l_1\right)$$

$$l_2 = h\left(-\frac{k}{m}\left(x_i + \frac{1}{2}k_1\right) - \frac{c}{m}\left(v_i + \frac{1}{2}l_1\right)\right)$$

$$l_3 = hg\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + rk_1 + sk_2, v_i + \frac{1}{2}l_2\right)$$

$$l_3 = h\left(-\frac{k}{m}\left(x_i + rk_1 + sk_2\right) - \frac{c}{m}\left(v_i + \frac{1}{2}l_2\right)\right)$$

$$l_4 = hg\left(t_i + h, x_i + tk_2 + uk_3, v_i + \frac{1}{2}l_3\right)$$

$$l_4 = h\left(-\frac{k}{m}\left(x_i + tk_2 + uk_3\right) - \frac{c}{m}\left(v_i + \frac{1}{2}l_3\right)\right)$$

Sehingga,

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + k_4) + \frac{1}{3}(sk_2 + uk_3)$$

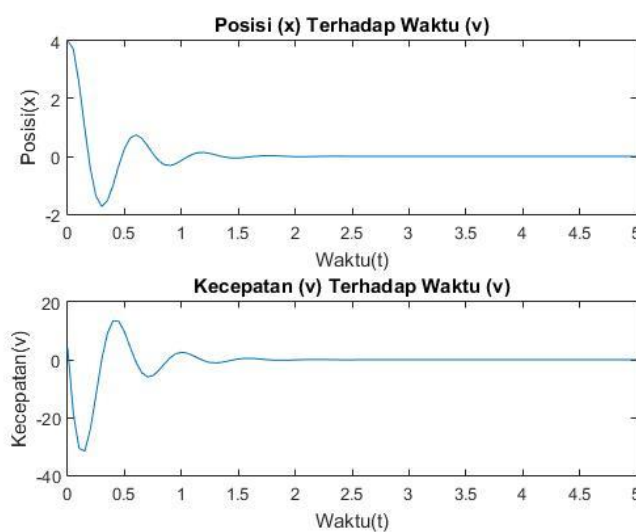
$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(l_1 + l_4) + \frac{1}{3}(sl_2 + ul_3)$$

```

Script MATLAB Metode Runge Kutta Gill
function [t, x, v] = rukg(g, t0, x0, v0, h, n)
% Menginisialisasi vektor t, x, dan v
t = zeros(n+1, 1);
x = zeros(n+1, 1);
v = zeros(n+1, 1);
% Menetapkan kondisi awal
t(1) = t0;
x(1) = x0;
v(1) = v0;
% Menghitung konstanta r, s, t, dan u
r = (sqrt(2) - 1) / 2;
s = (2 - sqrt(2)) / 2;
t_koefisien = -sqrt(2) / 2;
u_koefisien = 1 + sqrt(2) / 2;
for i = 1:n
k1 = h * v(i);
l1 = h * g(t(i), x(i), v(i));
k2 = h * (v(i) + 0.5 * l1);
l2 = h * g(t(i) + 0.5 * h, x(i) + 0.5 * k1, v(i) + 0.5 * l1);
k3 = h * (v(i) + 0.5 * l2);
l3 = h * g(t(i) + 0.5 * h, x(i) + r * k1 + s * k2, v(i) + 0.5 * l2);
k4 = h * (v(i) + 0.5 * l3);
l4 = h * g(t(i) + h, x(i) + t_koefisien * k2 + u_koefisien * k3, v(i) + 0.5 * l3);
% Mengupdate nilai x dan v menggunakan rumus Runge-Kutta-Gill
x(i+1) = x(i) + (1/6) * (k1 + k4) + (1/3) * (s * k2 + u_koefisien * k3);
v(i+1) = v(i) + (1/6) * (l1 + l4) + (1/3) * (s * l2 + u_koefisien * l3);
% Mengupdate nilai t
t(i+1) = t(i) + h;
end

```

Simulasi terhadap Persamaan Khusus (6) maka diperoleh grafik dan data sebagai berikut:



**Gambar 3.** Grafik Hasil Simulasi Matlab dengan Metode Runge Kutta Gill



**Tabel 4.** Hasil simulasi Metode Runge Kutta Gill

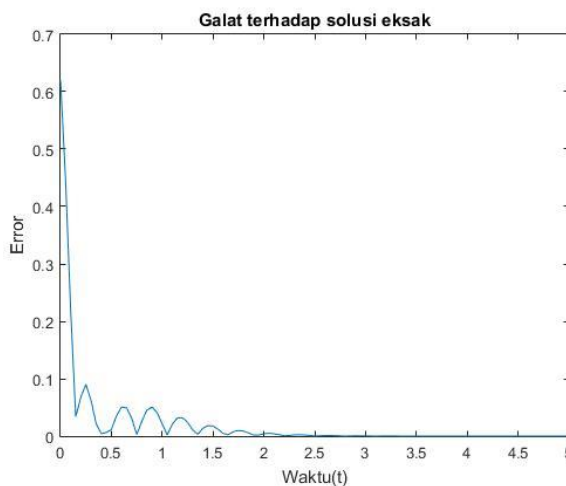
Waktu (t)	Posisi (x)	Kecepatan (v)	Galat
0	4.0000	4.0000	0.6200
0.0500	3.7207	-18.6499	0.4454
0.1000	2.5330	-30.6989	0.2191
0.1500	0.9777	-31.6435	0.0338
⋮	⋮	⋮	⋮
0.4000	-0.9821	13.5692	0.0044
⋮	⋮	⋮	⋮
5.0000	-0.0000	0.0000	0.0000

Berdasarkan pada gambar 3 dan tabel 4 terlihat bahwa pegas beresilasi dan mencapai titik setimbang pada  $t = 4$  dan meregang maksimal pada nilai 4 untuk posisi  $x$  terhadap waktu dan meregang maksimal pada nilai 13,5692 untuk kecepatan terhadap waktu.

Perhitungan Galat Pada Metode Runge Kutta Gill. Untuk menemukan hasil nilai galat dari metode ini dengan melakukan pengurangan dari hasil metode runge kutta gill kepada penyelesaian khusus dengan menggunakan script sebagai berikut,

```
x_exact = (exp(-3.23265*t).*((4.62*cos(10.71252*t))+1.81048*sin(10.71252*t)));
error = abs(x - x_exact)
end
```

Diperoleh grafik dari galat metode Runge Kutta Gill, yaitu



**Gambar 4.** Grafik Galat Metode Runge Kutta Gill

Berdasarkan data pada Gambar 4 dan tabel 4 dapat dilihat bahwa hasil dari penerapan metode runge kutta gill pada pegas memiliki galat paling besar yaitu 0.6200.

Penyelesaian Persamaan Getaran Pegas Tereadam Menggunakan Metode Milne. Metode milne merupakan tahapan lanjutan dari metode Runge Kutta Gill, yaitu sebagai tahapan prediksi persamaan (4) seperti pada persamaan (2)

$$x_{i+1} = x_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i)$$

$$v_{i+1} = v_{i-3} + \frac{4h}{3}(2g_{i-2} - g_{i-1} + 2g_i)$$

Tahapan berikutnya ialah melakukan koreksi terhadap persamaan (4) seperti pada persamaan (3). Sehingga diperoleh

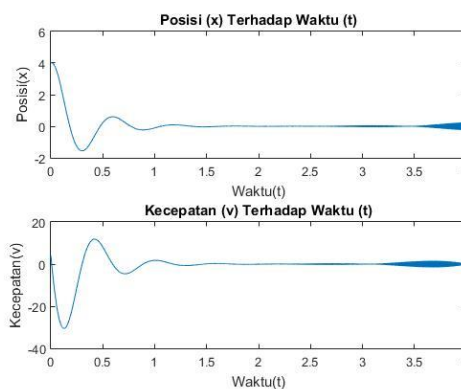
$$x_{i+1} = x_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

$$v_{i+1} = v_{i-1} + \frac{h}{3}(g_{i-1} + 4g_i + g_{i+1})$$

Script MATLAB Metode Milne

```
function [t, x, v] = milneMethod(g, t0, x0, v0, h, n)
% Menginisialisasi vektor t, x, dan v
t = zeros(n+1, 1);
x = zeros(n+1, 1);
v = zeros(n+1, 1);
% Menetapkan kondisi awal
t(1) = t0;
x(1) = x0;
v(1) = v0;
for i = 1:3
k1 = h * v(i);
l1 = h * g(t(i), x(i), v(i));
k2 = h * (v(i) + 0.5 * l1);
l2 = h * g(t(i) + 0.5 * h, x(i) + 0.5 * k1, v(i) + 0.5 * l1);
k3 = h * (v(i) + 0.5 * l2);
l3 = h * g(t(i) + 0.5 * h, x(i) + 0.5 * k2, v(i) + 0.5 * l2);
k4 = h * (v(i) + 0.5 * l3);
l4 = h * g(t(i) + h, x(i) + k3, v(i) + 0.5 * l3);
x(i+1) = x(i) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6;
v(i+1) = v(i) + (l1 + 2*l2 + 2*l3 + l4) / 6;
t(i+1) = t(i) + h;
end
for i = 4:n
% Menghitung nilai perkiraan menggunakan metode Milne
x_pred = x(i-3) + 4*h/3 * (2*v(i-2) - v(i-1) + 2*v(i));
v_pred = v(i-3) + 4*h/3 * (2*g(t(i-2), x(i-2), v(i-2)) - (g(t(i-1), x(i-1), v(i-1)))) + (2*g(t(i), x(i), v(i))));
% Menghitung nilai koreksi menggunakan metode Milne
x_corr = x(i-1) + h/3 * (v(i-1) + 4*v(i) + v_pred);
v_corr = v(i-1) + h/3 * (g(t(i-1), x(i-1), v(i-1)) + 4*g(t(i), x(i), v(i)) + g(t(i+1), x_pred, v_pred));
% Mengupdate nilai x v dan t
x(i+1) = x_corr;
v(i+1) = v_corr;
t(i+1) = t(i) + h;
end
```

Simulasi pada persamaan khusus (6) menghasilkan grafik sebagai berikut:



**Gambar 5.** Grafik Hasil Simulasi Matlab dengan Metode Milne

**Tabel 5.** Hasil Simulasi Metode Milne

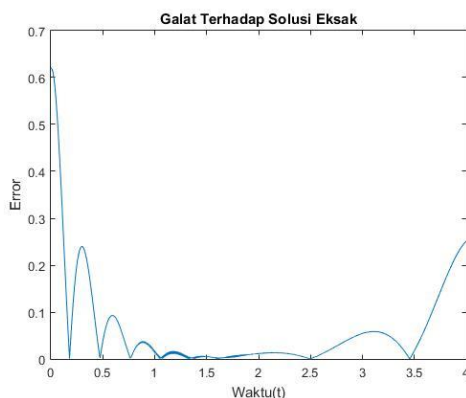
Waktu (t)	Posisi (x)	Kecepatan (v)	Galat
0	4.0000	4.0000	0.6200
0.0050	4.0146	1.3968	0.6202
0.0100	4.0163	-1.1284	0.6186
0.0150	4.0055	-3.5701	0.6151
⋮	⋮	⋮	⋮
0.4200	-0.6155	11.8406	0.0911
⋮	⋮	⋮	⋮
4.0000	-0.2511	0.2333	0.2511

Berdasarkan pada gambar 5 dan tabel 5 terlihat bahwa pegas beresilasi dan hampir mencapai titik setimbang pada sekitar  $t = 2$  namun terjadi lonjakan kembali. Dan meregang maksimal pada nilai 4,0146 untuk posisi  $x$  terhadap waktu dan meregang maksimal pada nilai 11,8406 untuk kecepatan terhadap waktu.

Perhitungan Galat Pada Metode Milne. Untuk menemukan hasil nilai galat dari metode ini dengan melakukan pengurangan dari hasil metode milne kepada penyelesaian khusus dengan menggunakan script sebagai berikut,

```
x_exact = (exp(-3.23265*t).*((4.62*cos(10.71252*t))+1.81048*sin(10.71252*t)));
error = abs(x - x_exact)
end
```

Diperoleh grafik dari galat metode Milne, yaitu



**Gambar 6.** Grafik Galat dari Metode Milne

Berdasarkan data pada gambar 6 dan tabel 5 dapat dilihat bahwa hasil dari penerapan metode milne pada pegas memiliki galat paling besar yaitu 0.6202.

**D. Kesimpulan**

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, maka diperoleh kesimpulan yaitu pada dari penyelesaian menggunakan metode analitik diperoleh Penyelesaian Khusus getaran pegas teredam dengan  $m = 227,8 \text{ kg}$ ,  $c = 1472,8 \text{ Ns/m}$ ,  $k = 28522,46 \text{ N/m}$ , yaitu

$$x(t) = e^{-3,23265t}(4,62 \cos(10,71252t) + 1,81048 \sin(10,71252t))$$

Metode Runge Kutta Gill memiliki fleksibilitas dengan penambahan parameter  $r, s, t$  dan  $u$  sedangkan metode Runge Kutta Orde 4 memiliki hasil yang pasti dengan jumlah selang yang ditentukan. Dalam kasus ini metode Milne merupakan metode yang kurang baik dikarenakan hasil yang mengalami lonjakan kembali setelah  $t = 2$ .

## Daftar Pustaka

- [1] D. Giancoli, R. Resnick, and J. Walker, *Fisika Dasar*. Jakarta: Erlangga, 2005.
- [2] S. Winatapura, *Strategi Belajar Mengajar Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka Depdikbud, 1993.
- [3] D. Young and R. Freedman, *Fisika Universitas Jilid I*. Jakarta: Erlangga, 1996.
- [4] Serway and Jewett, *Physics for Scientist and Engineers*, 6th ed. Pomona: Thomson Brooks/Cole, 2004.
- [5] P. Tipler, *Fisika Untuk Sains Dan Teknik*. Jakarta: Erlangga, 1991.
- [6] E. Kreyszig, *Matematika Teknik Lanjutan*. Jakarta: Erlangga, 1993.
- [7] M. Yokoyama and M. Yamagishi, "Development of Steering Control System for Motorcycles," *International Federation of Automatic Control*, vol. 55, no. 27, pp. 448–453, 2022.
- [8] R. Munir, *Metode Numerik*. Bandung: Informatika, 2008.
- [9] A. Tjolleng, *Pengantar Pemrograman Matlab*. Jakarta: PT Elex Media Komputindo, 2017.
- [10] Suhandoko, *Analisis Getaran Pada Sistem Suspensi Kendaraan Roda Dua (Yamaha Jupiter Z 2004) Menggunakan Simulasi Software Matlab 6.5*. Surakarta: Universitas Muhammadiyah Surakarta, 2014.